

# Sintesi in frequenza

## Uso delle reti di correzione

Fondamenti di Automatica

2014-15

A. De Luca, 7 Maggio 2015

## ipotesi di lavoro

sistema ad anello aperto  $P(s)$  **senza** poli a parte reale positiva

### passo 1: imporre le specifiche a regime permanente

- ingresso-uscita
  - ingressi polinomiali: tipo  $k$ , errore  $e_k \leq E_{max}$
  - ingressi sinusoidali: riproduzione o attenuazione  $e(t) \leq E_{max}$
- disturbo-uscita
  - disturbi costanti: astatismo o attenuazione  $y_z(t) \leq E_z$
  - disturbi sinusoidali: attenuazione in un campo  $(\omega_{min}, \omega_{max})$   
⇒ con maschere in frequenza sul modulo
- sensibilità alle variazioni parametriche



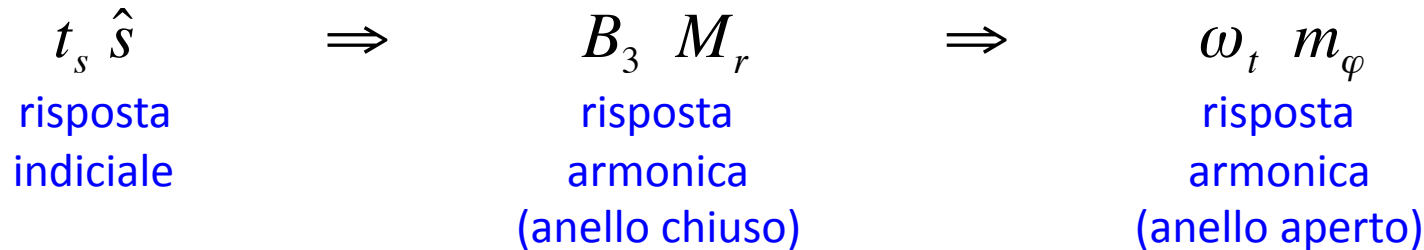
- **azioni** nel controllore  $C(s)$ :

$$\blacktriangleright K_C \quad \frac{1}{s^h} \quad \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad \dots$$

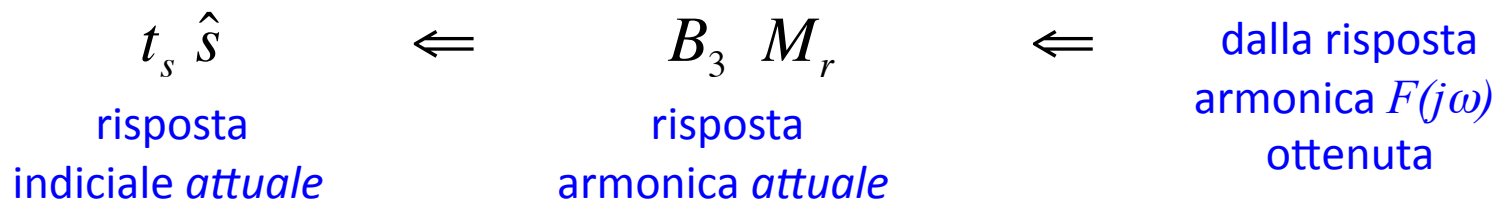
il minimo guadagno così trovato non andrà più ridotto!

## passo 2: imporre le specifiche sul transitorio

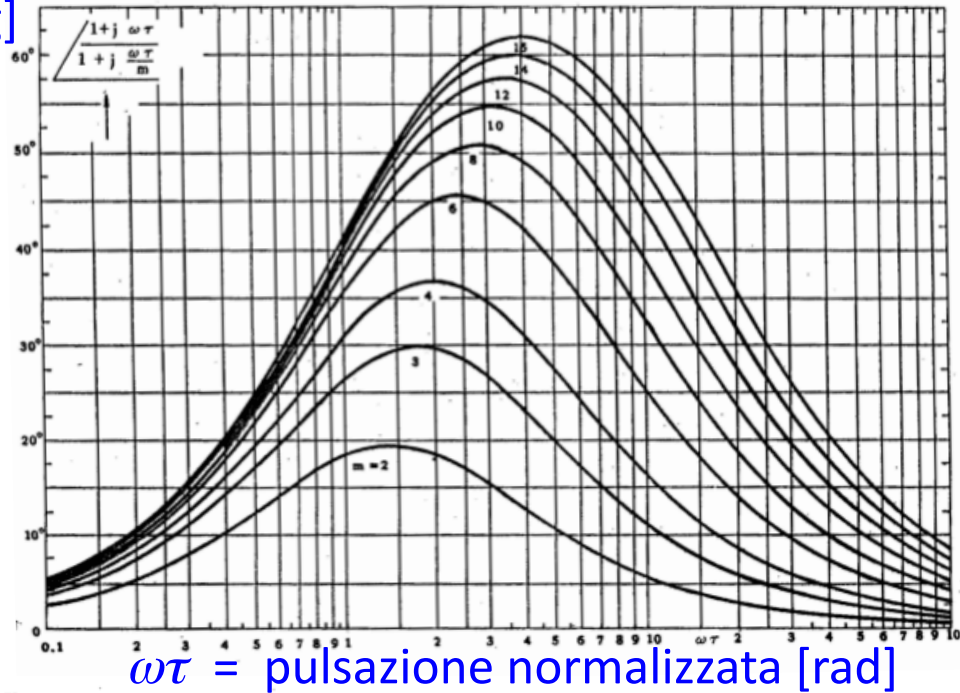
- trasformazione di specifiche tra domini



- azioni** nel controllore  $C(s)$ :
  - aggiungere reti di correzione (o di compensazione)  $R(s)$  in frequenza, eventualmente aumentando il guadagno
  - $C(s)$  complessiva tale che  $F(j\omega) = P(j\omega) C(j\omega)/K_d$  abbia le desiderate  $\omega_t$  e  $m_\phi$
- verifica** del progetto (per simulazione o esperimenti reali)



+ [deg]



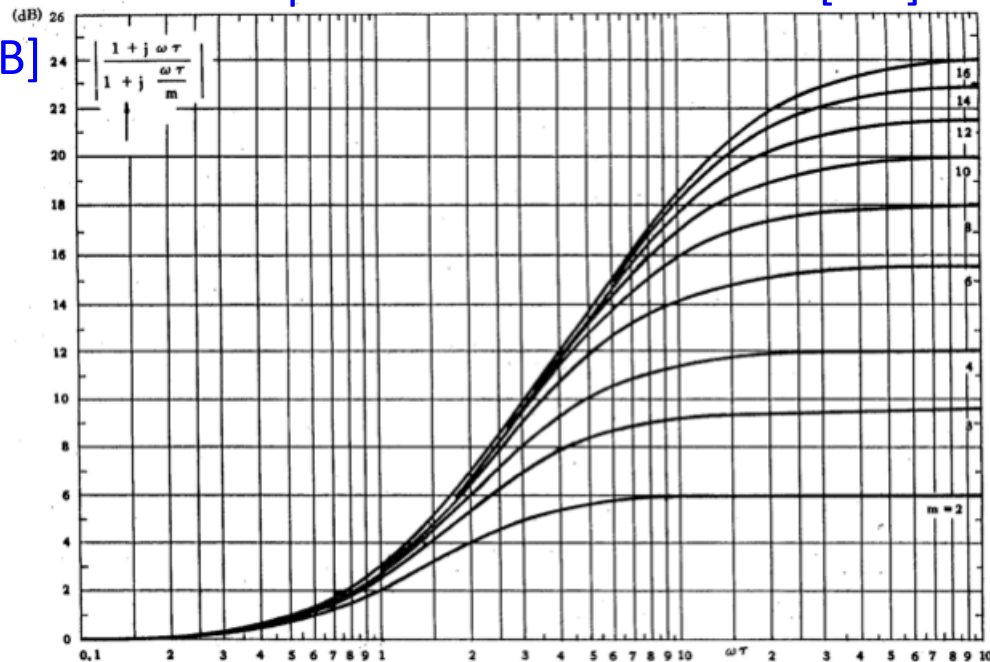
**fasi**  
“anticipate”  
in un campo  
di frequenze

$$R_{ant}(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s}$$

reti di correzione  
**anticipatrici**  
(lead)

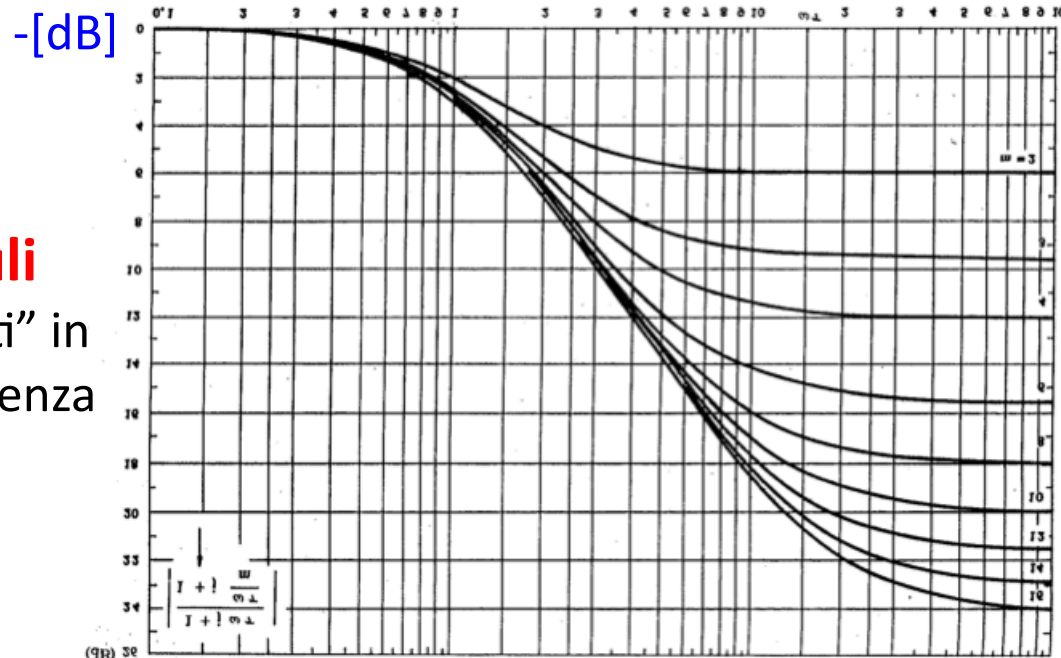
- guadagno unitario
- **zero precede polo**

+ [dB]



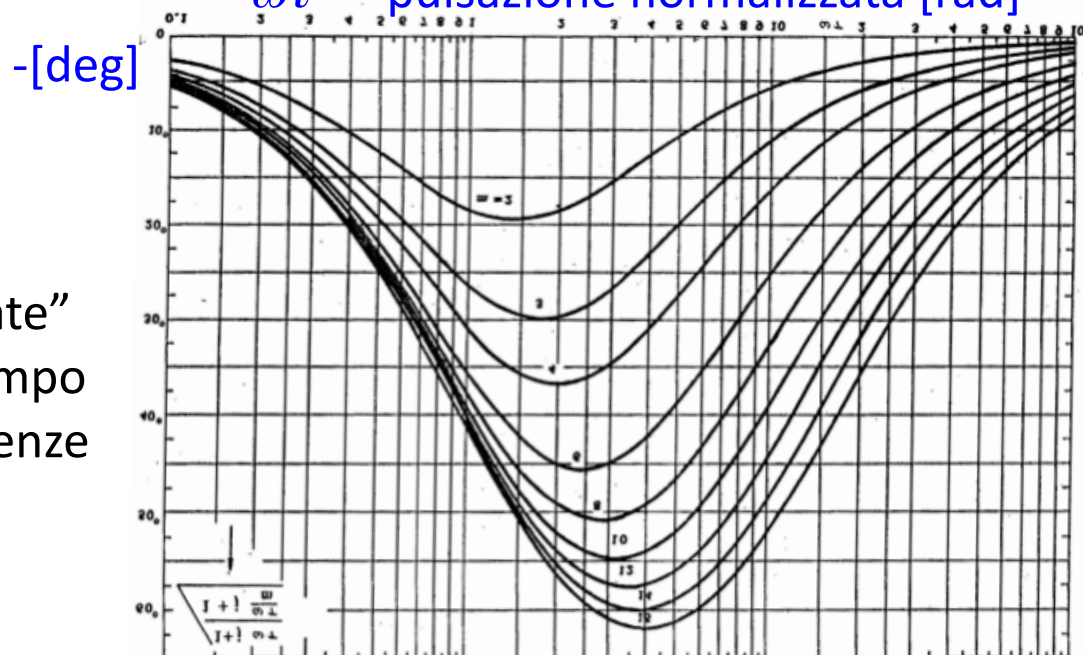
**moduli**  
“amplificati” in  
alta frequenza

**moduli**  
 “attenuati” in  
 alta frequenza



$\omega\tau =$  pulsazione normalizzata [rad]

**fasi**  
 “ritardate”  
 in un campo  
 di frequenze



$$R_{att}(s) = \frac{1 + (\tau_i/m_i)s}{1 + \tau_i s}$$

**reti di correzione  
 attenuatrici  
 (lag)**

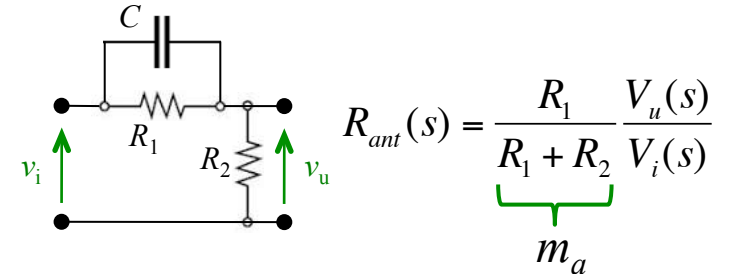
- guadagno unitario
- zero segue polo

sono gli stessi  
 grafici di prima,  
 ma “ribaltati”!!

## effetti della rete **anticipatrice** (lead)

- 😊 aumenta la pulsazione di taglio  $\omega_t$
- 😊 aumenta la velocità di risposta
- 😞 aumenta lo sforzo di controllo
- 😞 più sensibile ai rumori
- 😞 ... e alle dinamiche veloci non modellate

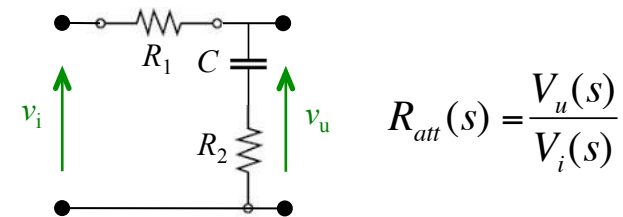
$$R_{ant}(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s}$$



## effetti della rete **attenuatrice** (lag)

- 😞 riduce la pulsazione di taglio  $\omega_t$
- 😞 riduce la velocità di risposta
- 😊 riduce lo sforzo di controllo
- 😊 poco sensibile ai rumori
- 😊 ... e alle dinamiche veloci non modellate

$$R_{att}(s) = \frac{1 + (\tau_i / m_i) s}{1 + \tau_i s}$$



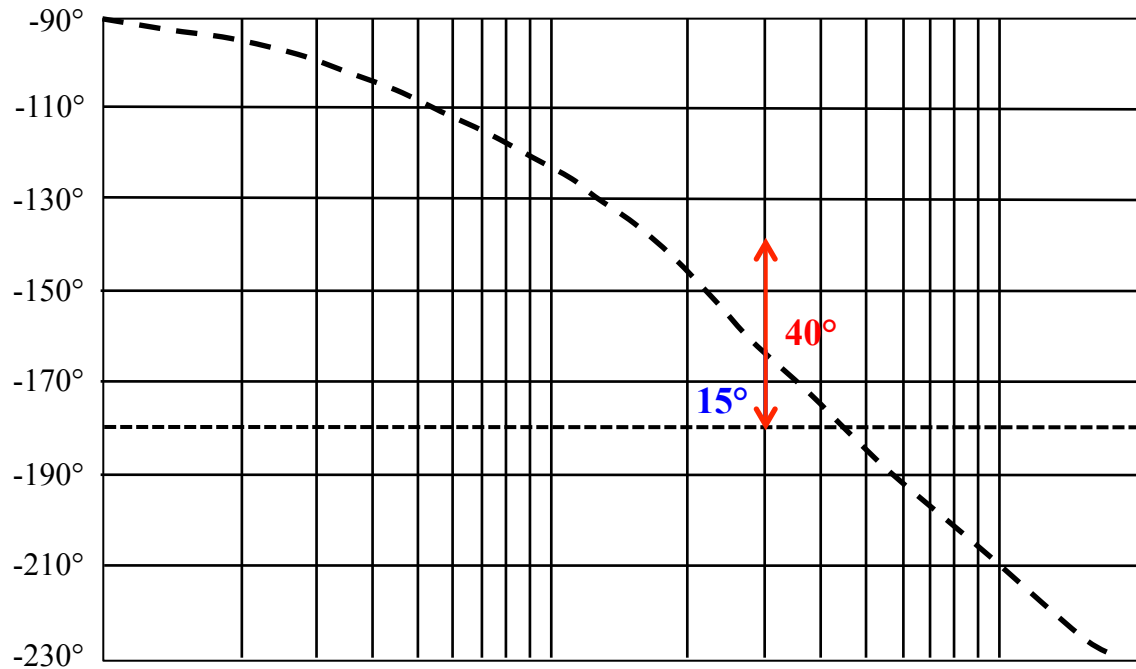
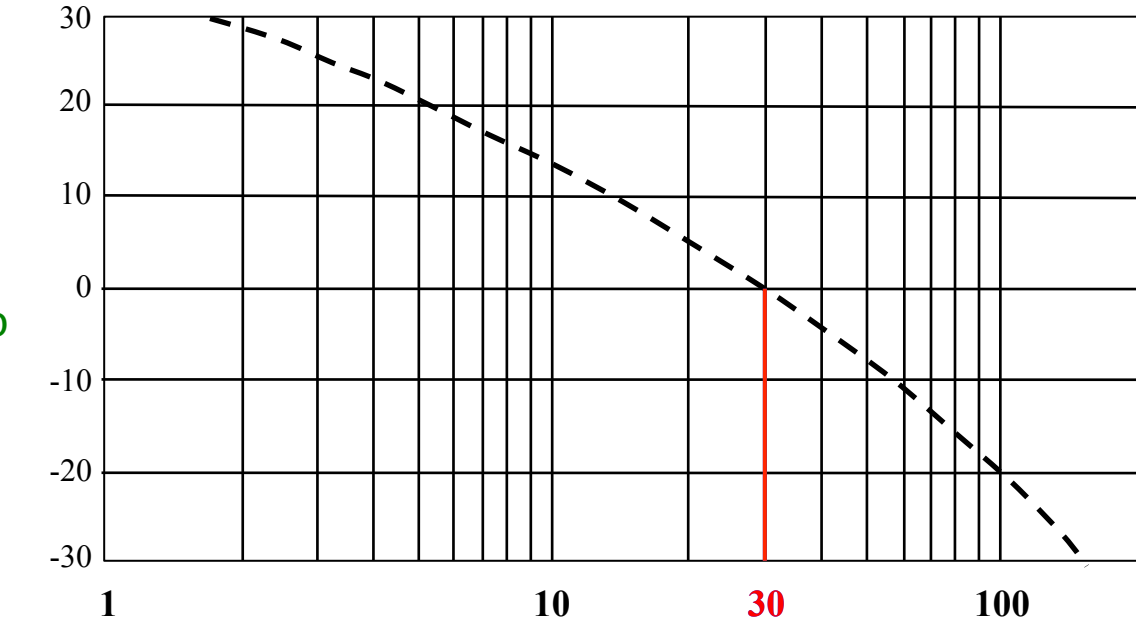
# Esempio # 1

aumento  
margine di fase  
a parità  
di pulsazione  
di attraversamento

iniziali

$$\hat{\omega}_t = 30$$

$$\hat{m}_\varphi = 15^\circ$$



desiderati

$$\omega_t \approx 30$$

$$m_\varphi = 40^\circ$$



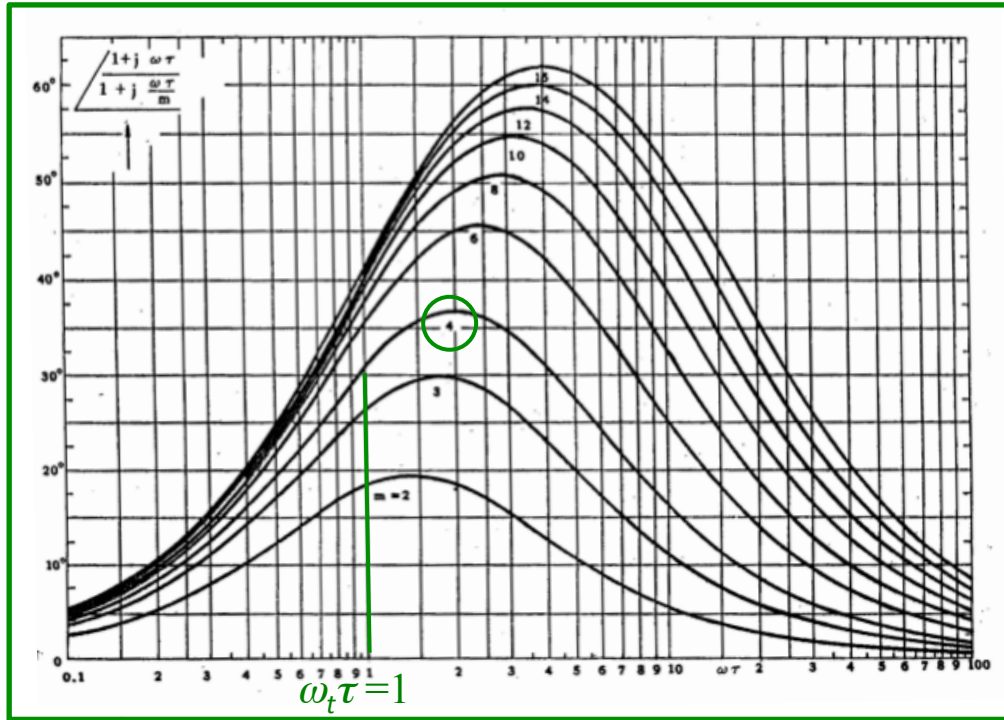
anticipatrice  
con circa 30°  
di recupero

(una parte si  
perderà per lo  
'shift' in avanti  
della  $\omega_t$ )

# Esempio # 1

$$\omega_t \cong \hat{\omega}_t$$

$$m_\varphi > \hat{m}_\varphi$$



anticipatrice

$m_a = 4$   
per avere 30°  
abbondanti  
per il recupero

usata vicino al  
(a sinistra del)  
picco

$$\omega_t \tau_a \cong 1$$

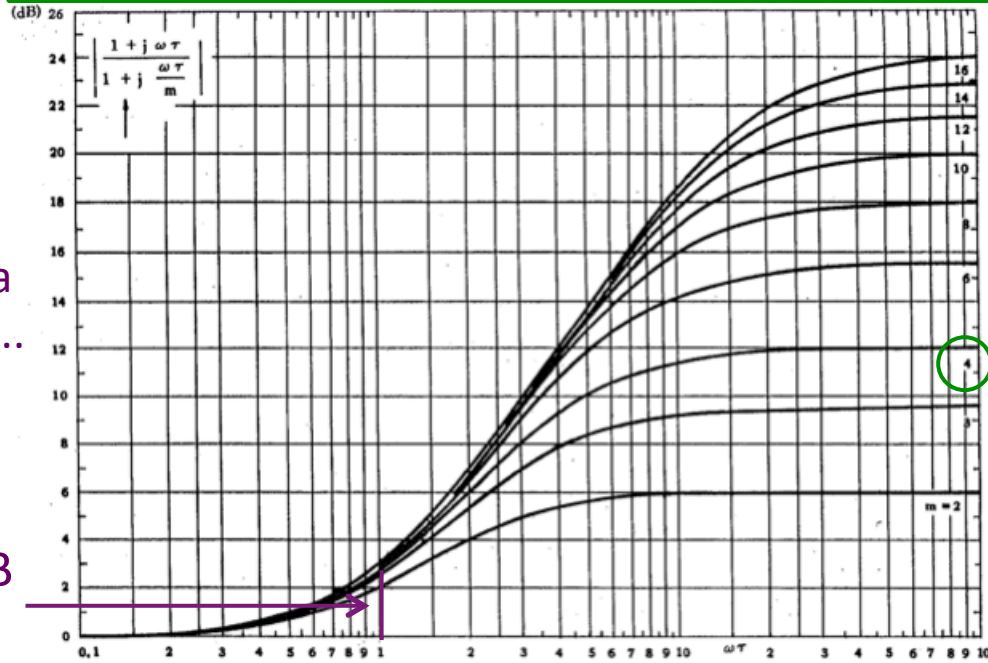
centrata @

$$\omega_t = 30$$

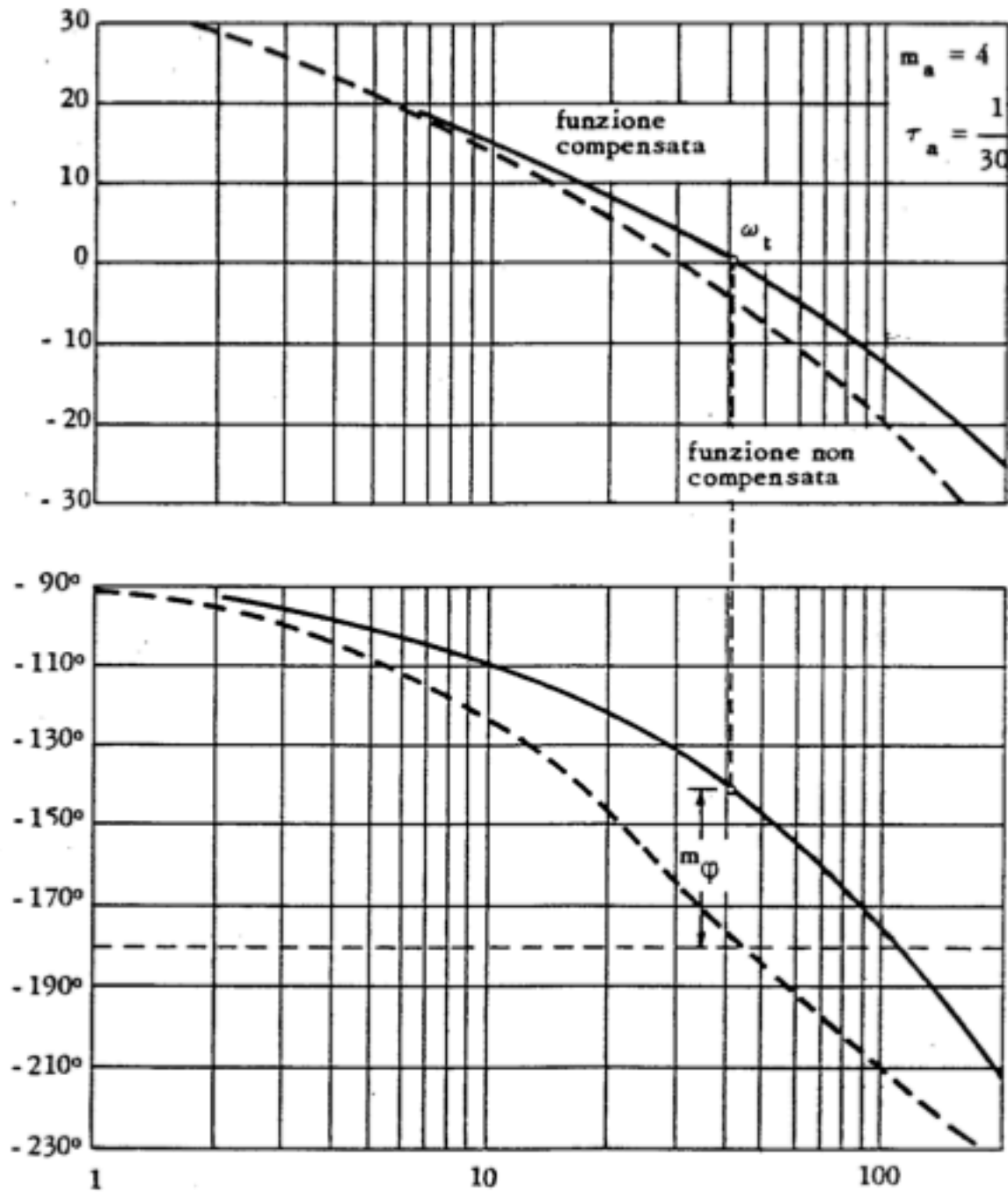
$$\Rightarrow \tau_a = 1/30$$

$\omega_t$  si sposterà  
(di poco) verso una  
frequenza più alta ...

+ 3 dB  
@  $\omega_t$







## Soluzione # 1

$$\begin{aligned}
 R_{ant}(s) &= \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s} \\
 &= \frac{1 + (1/30) s}{1 + (1/120) s} \\
 &= 4 \cdot \frac{s + 30}{s + 120}
 \end{aligned}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t = 40$$

$$m_\phi = 40^\circ$$

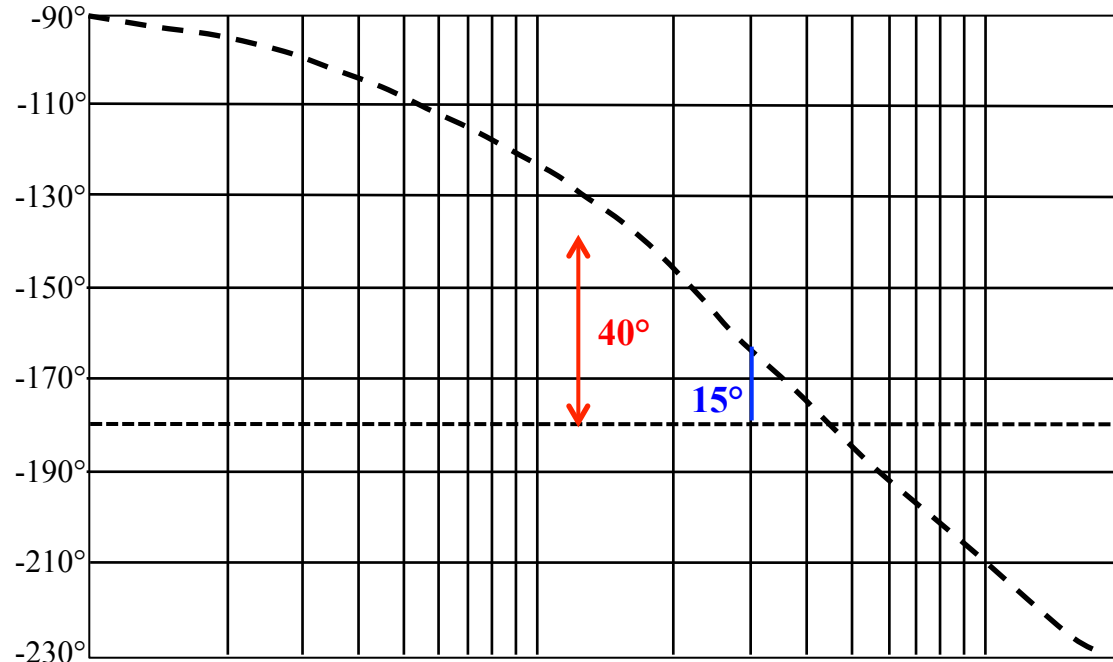
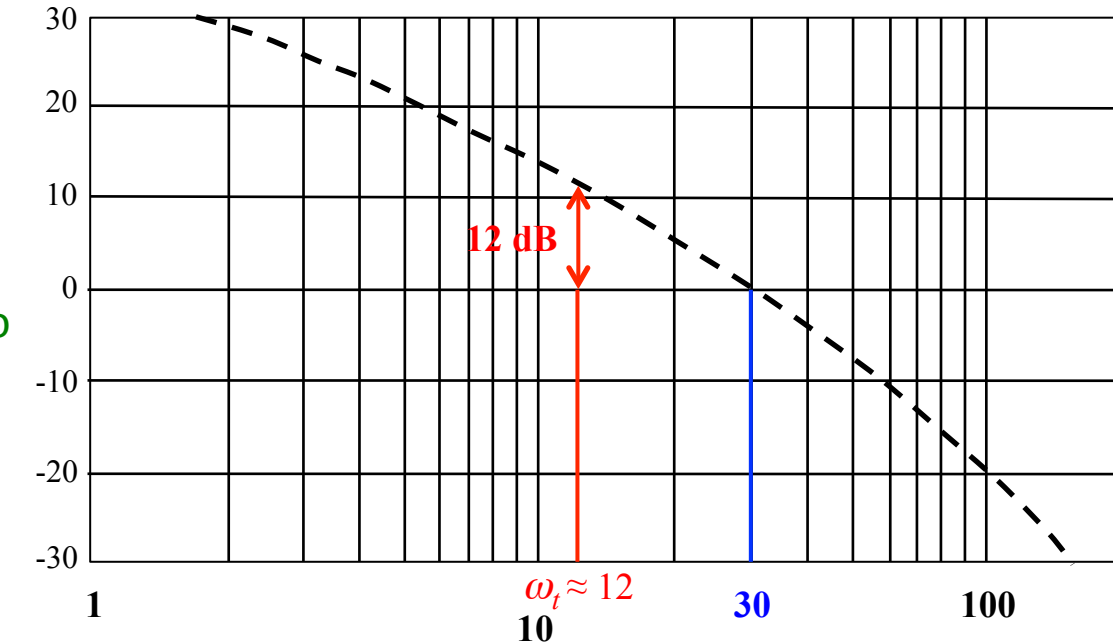
## Esempio # 2

aumento  
margine di fase  
con diminuzione  
di pulsazione  
di attraversamento

stessi valori  
iniziali di # 1

$$\hat{\omega}_t = 30$$

$$\hat{m}_\varphi = 15^\circ$$



nuovi valori  
desiderati

$$\omega_t \leq \hat{\omega}_t$$

quanto basta per

$$m_\varphi = 40^\circ$$



ad esempio

$$\omega_t \approx 12$$

dove la fase è  
abbondante ( $50^\circ$ )

si deve attenuare

$$|G(j\omega_t)| = 12 \text{ dB}$$



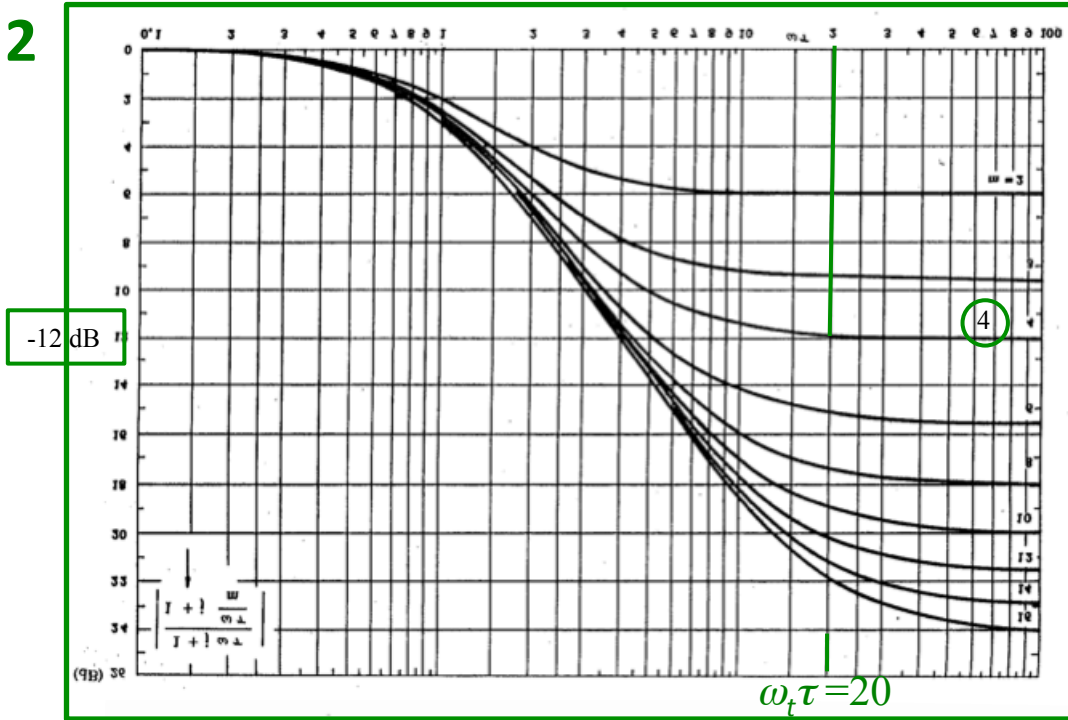
attenuatrice

usata  
"in coda"

## Esempio # 2

$$\omega_t \leq \hat{\omega}_t$$

$$m_\varphi > \hat{m}_\varphi$$



attenuatrice

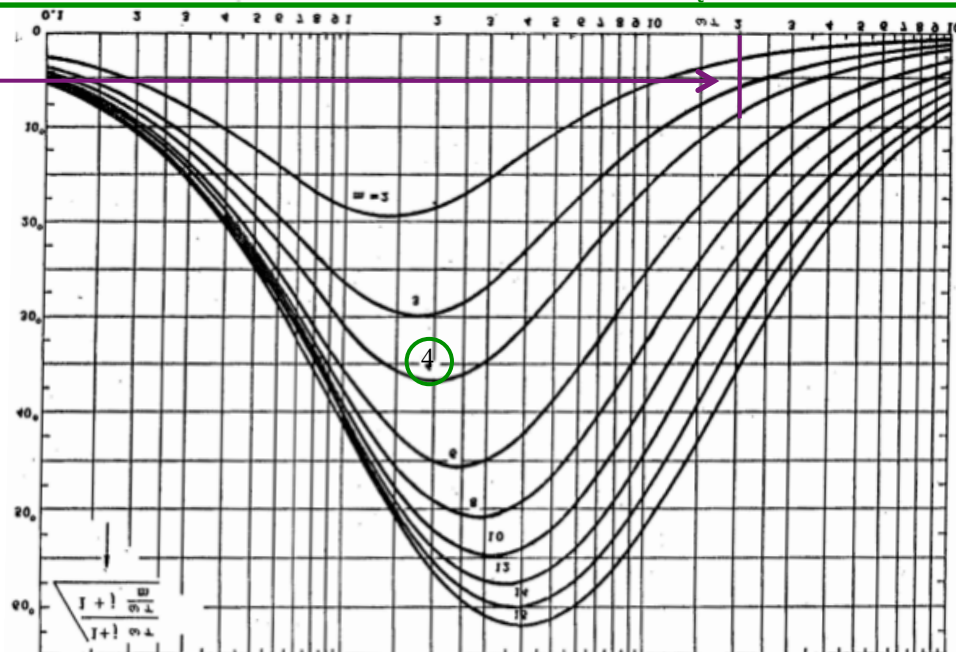
$m_i = 4$   
per avere i  
necessari -12 dB  
di attenuazione

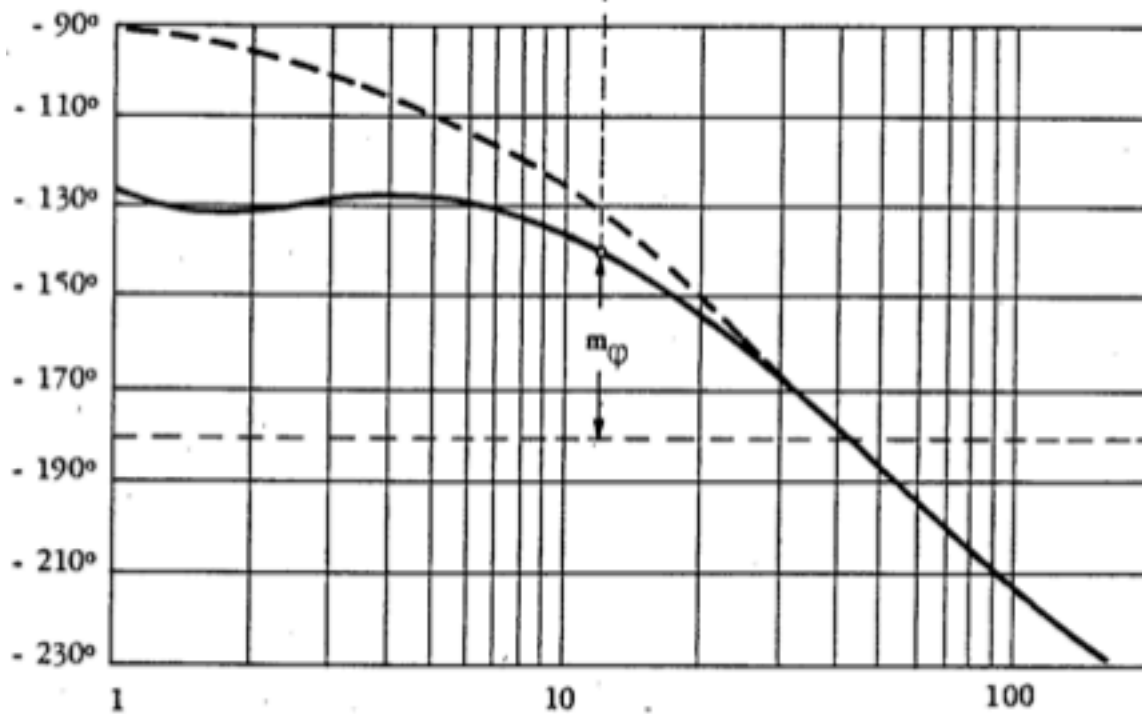
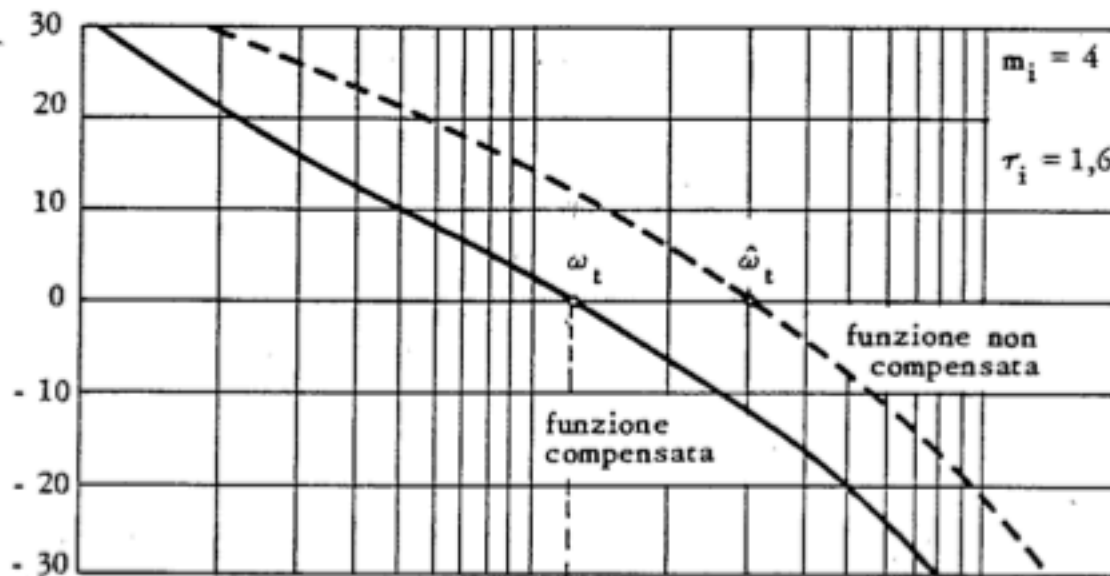
usata verso  
la coda  
 $\omega_t \tau_i \cong 20$

centrata @  
 $\omega_t = 12$   
 $\Rightarrow \tau_i = 20/12 = 1.\bar{6}$

- 8°  
@  $\omega_t$

si perderà un po'  
del margine di fase  
guadagnato ...





## Soluzione # 2

$$\begin{aligned}
 R_{att}(s) &= \frac{1 + (\tau_i/m_i)s}{1 + \tau_i s} \\
 &= \frac{1 + (5/12)s}{1 + (20/12)s} \\
 &= 0.25 \cdot \frac{s + 2.4}{s + 0.6}
 \end{aligned}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t = 12$$

$$m_\varphi = 42^\circ$$

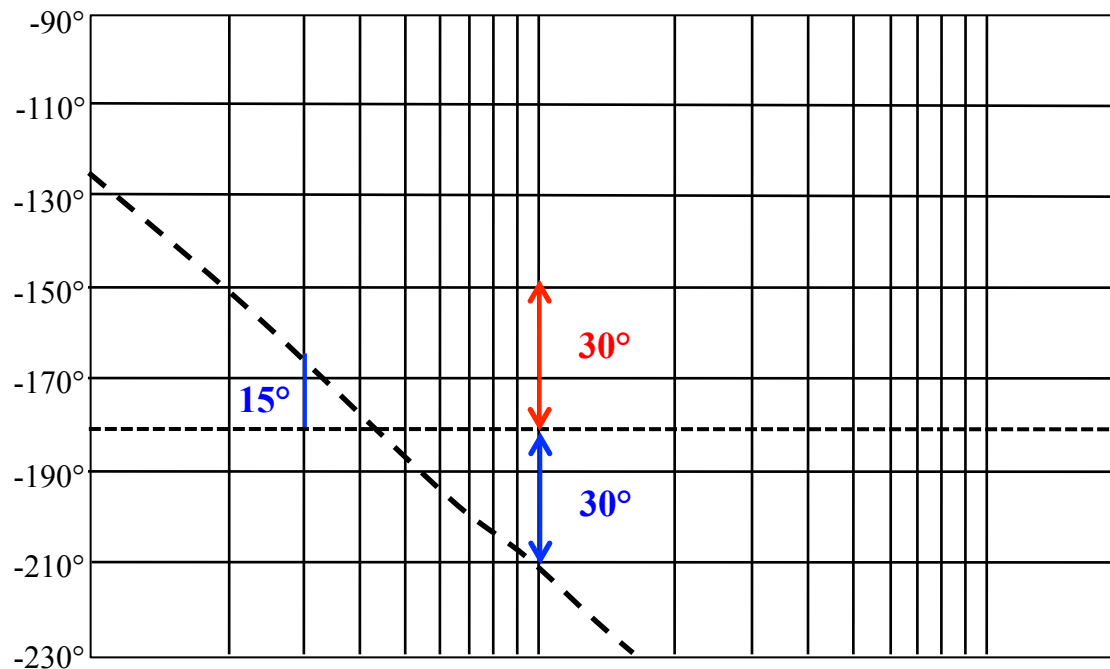
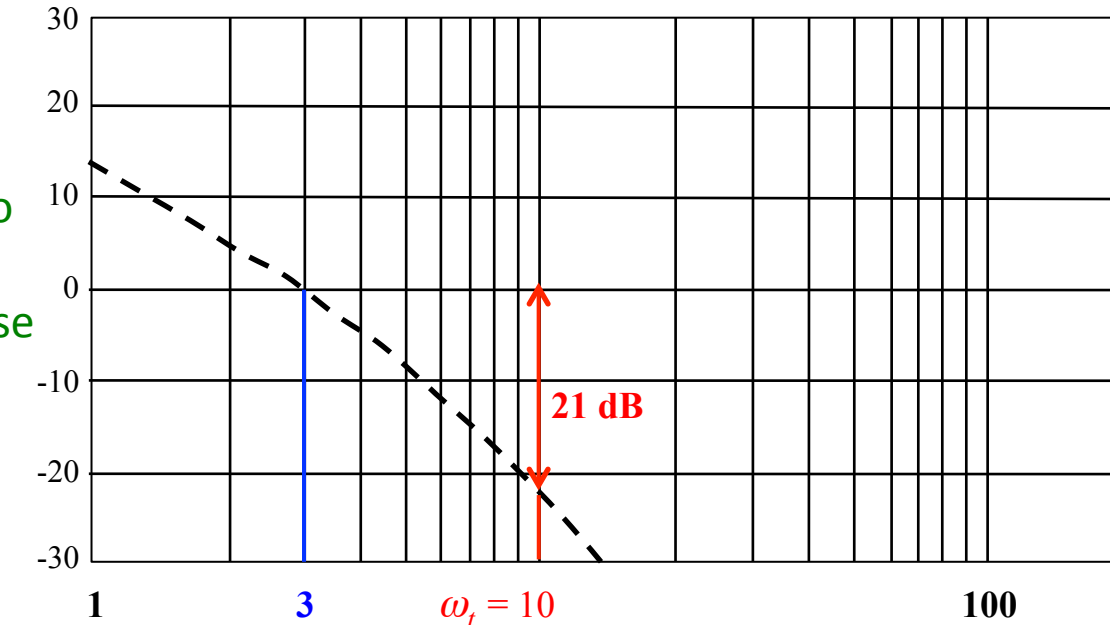
### Esempio # 3

aumento  
della pulsazione  
di attraversamento  
preservando un  
buon margine di fase

iniziali

$$\hat{\omega}_t = 3$$

$$\hat{m}_\varphi = 15^\circ$$



desiderati

$$\omega_t = 10$$

$$m_\varphi \geq 30^\circ$$



non basta solo un  
guadagno +21 dB  
(non ho margine  
di fase @  $\omega_t$ )

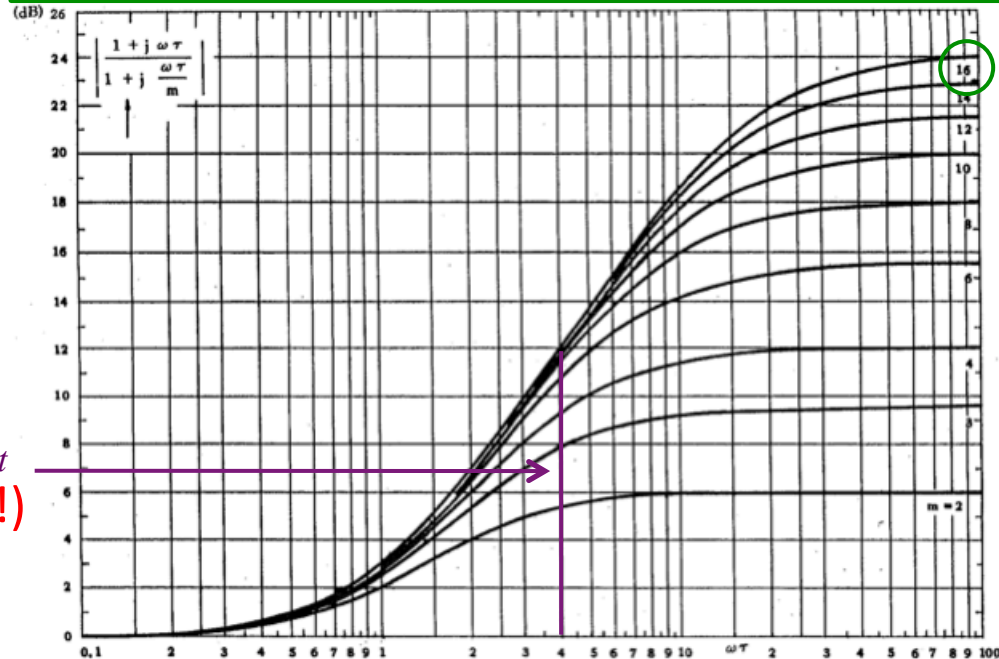
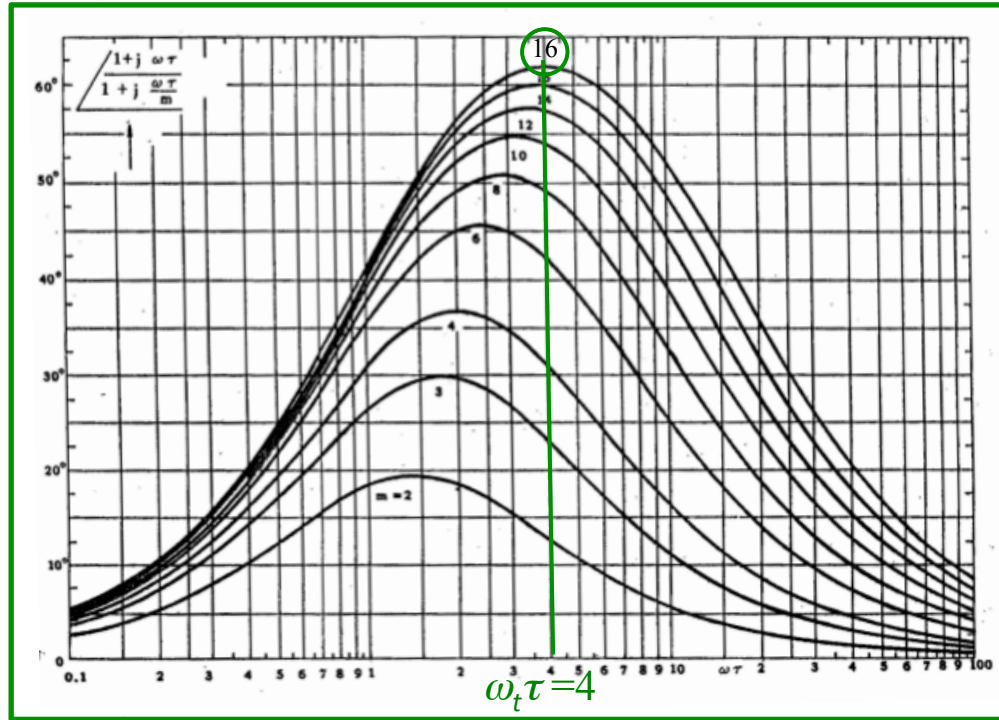


- i) **anticipatrice**  
con 60° di  
recupero  
+
- ii) **successivo  
guadagno**

## Esempio # 3

$$\omega_t > \hat{\omega}_t$$

$$m_\varphi \geq \hat{m}_\varphi$$



+ 12 dB @  $\omega_t$   
(qui aiutano!)

i) **anticipatrice**

$m_a = 16$   
per avere i  $60^\circ$   
necessari  
di recupero

usata nel  
picco

$$\omega_t \tau_a \cong 4$$

centrata @

$$\omega_t = 10$$

$$\Rightarrow \tau_a = 4/10 = 0.4$$

ii) **guadagno**

a valle dello  
spostamento  
in avanti della  $\omega_t$   
servono altri  
+ 9 dB ( $K = 2.81$ )

### Soluzione # 3

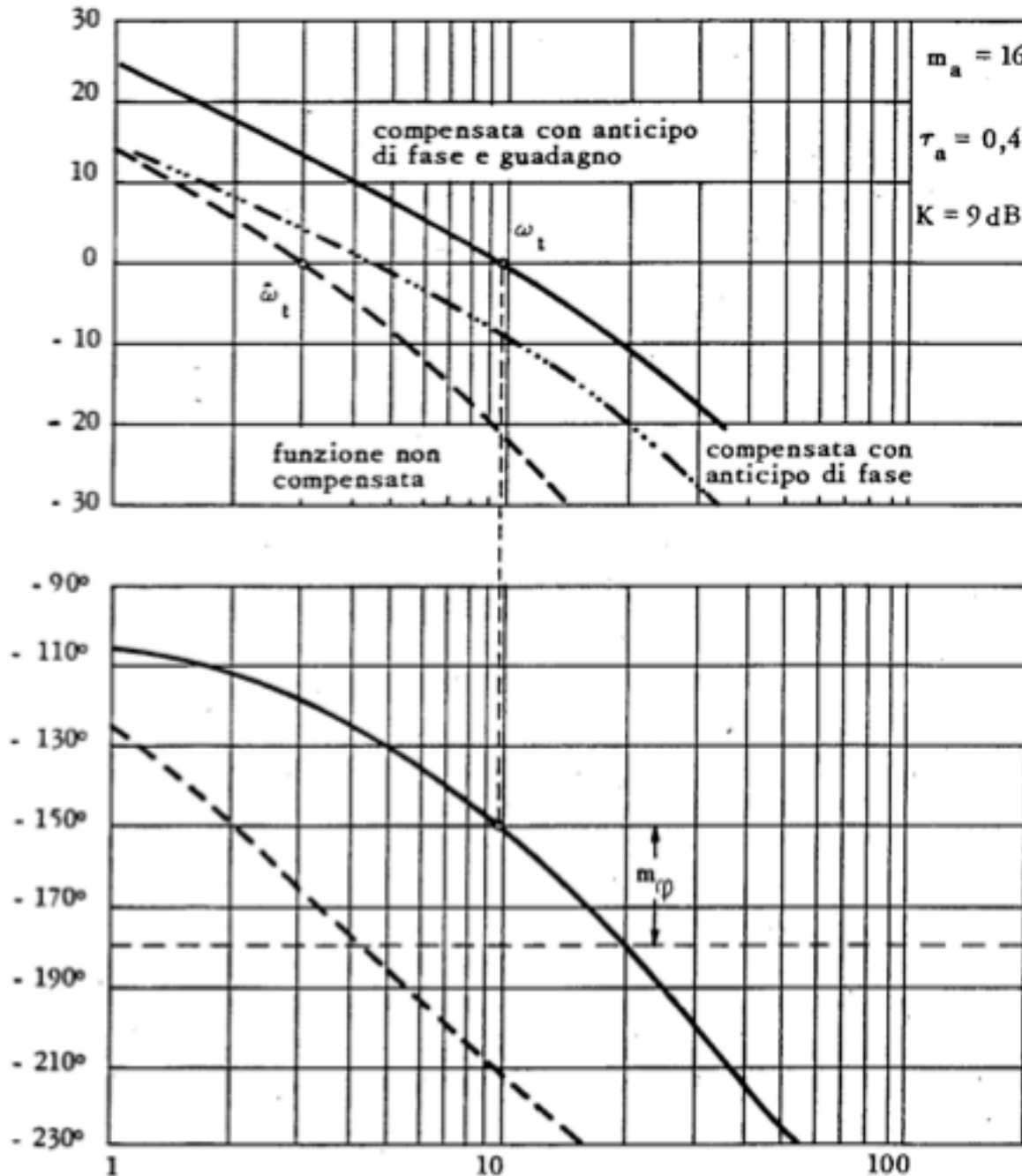
$$\begin{aligned}
 K \cdot R_{ant}(s) &= K \cdot \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s} \\
 &= 2.81 \cdot \frac{1 + 0.4s}{1 + (0.4/16)s} \\
 &= 44.96 \cdot \frac{s + 2.5}{s + 40}
 \end{aligned}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t \cong 10$$

$$m_\varphi = 30^\circ$$



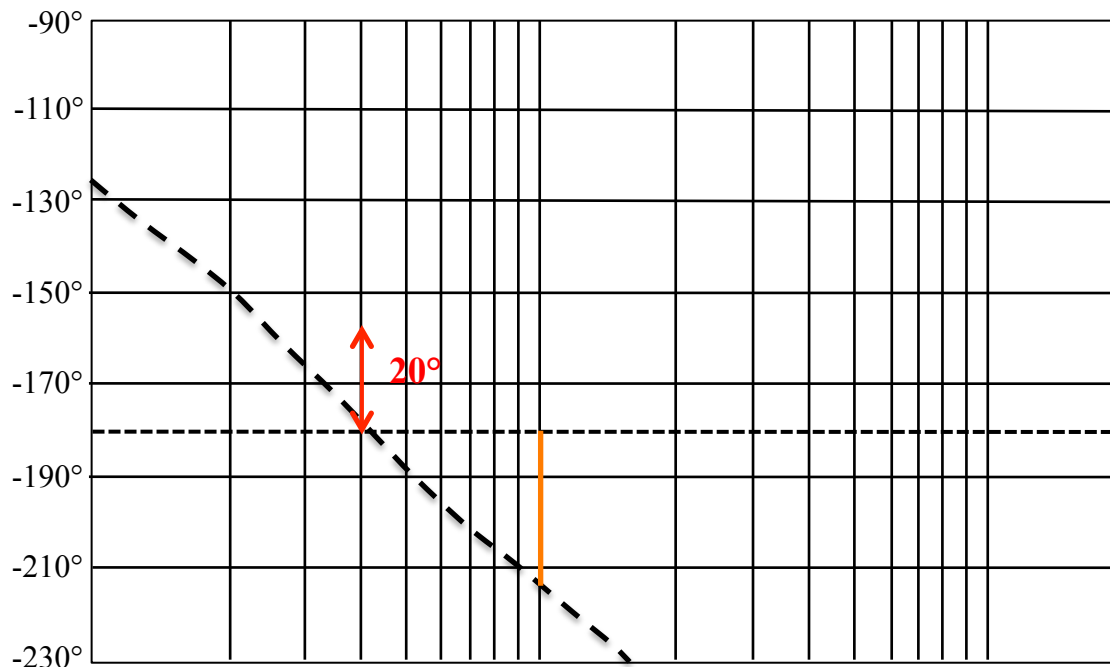
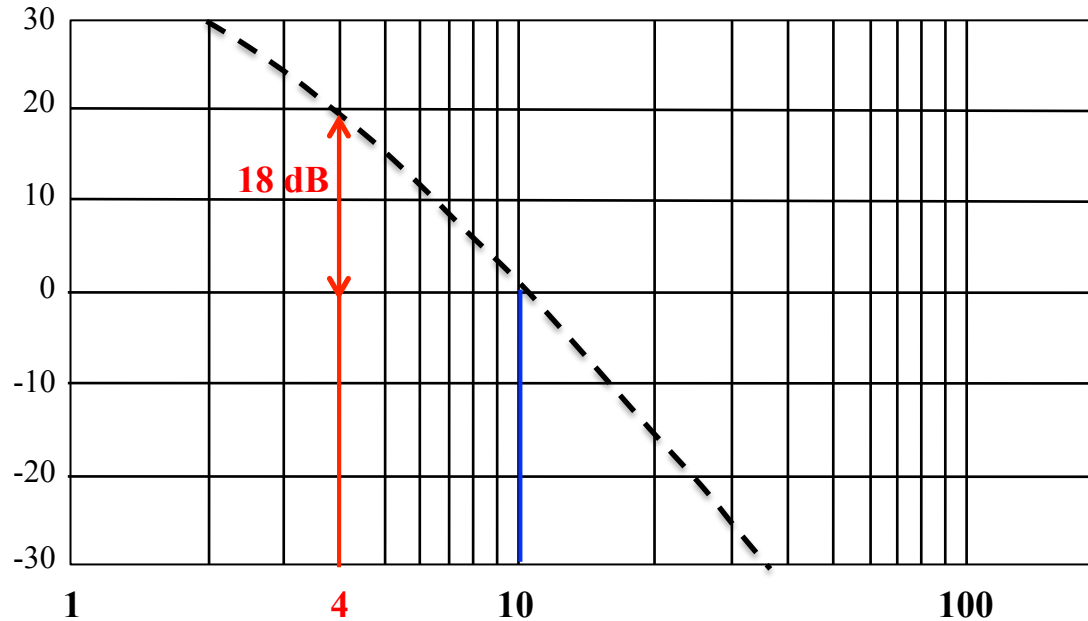
## Esempio # 4

riduzione  
della pulsazione  
di attraversamento  
migliorando il  
margine di fase

iniziali

$$\hat{\omega}_t \cong 10$$

→  $\hat{m}_\varphi = \text{NO!}$



desiderati

$$\omega_t = 4$$

$$m_\varphi \geq 20^\circ$$



non basta solo  
un'attenuatrice  
(non ho margine  
di fase @  $\omega_t$ )



i) **anticipatrice**  
per avere margine  
di fase  $\geq 20^\circ$  @  $\omega_t$

+

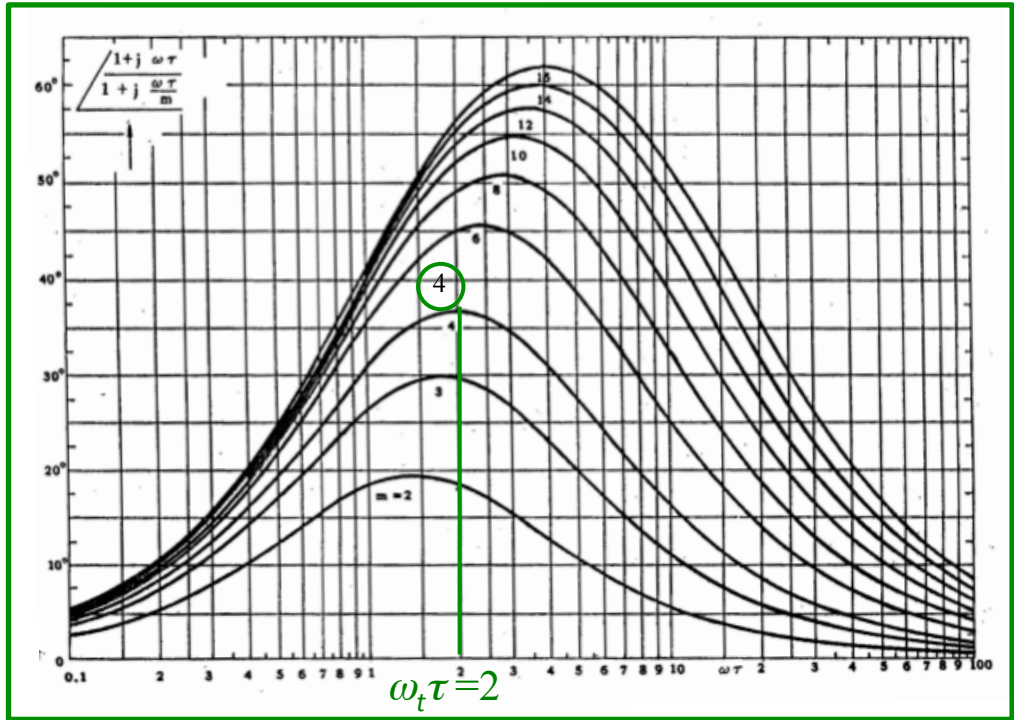
ii) **attenuatrice**  
abbassa la  $\omega_t$   
senza ridurre  
il guadagno



# Esempio # 4

$$\omega_t < \hat{\omega}_t$$

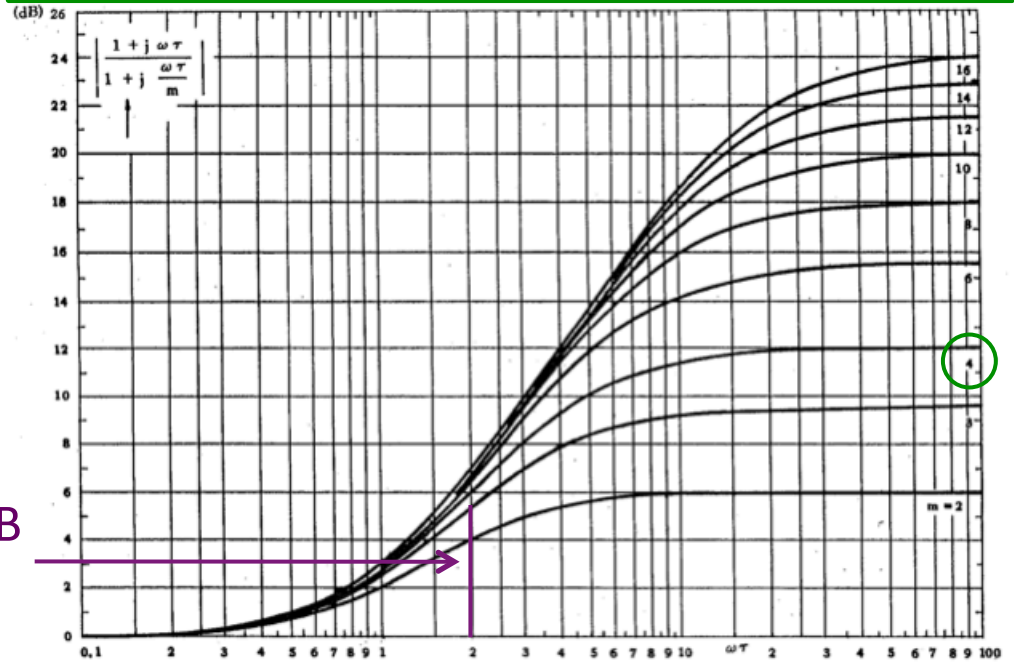
con  $m_\varphi$



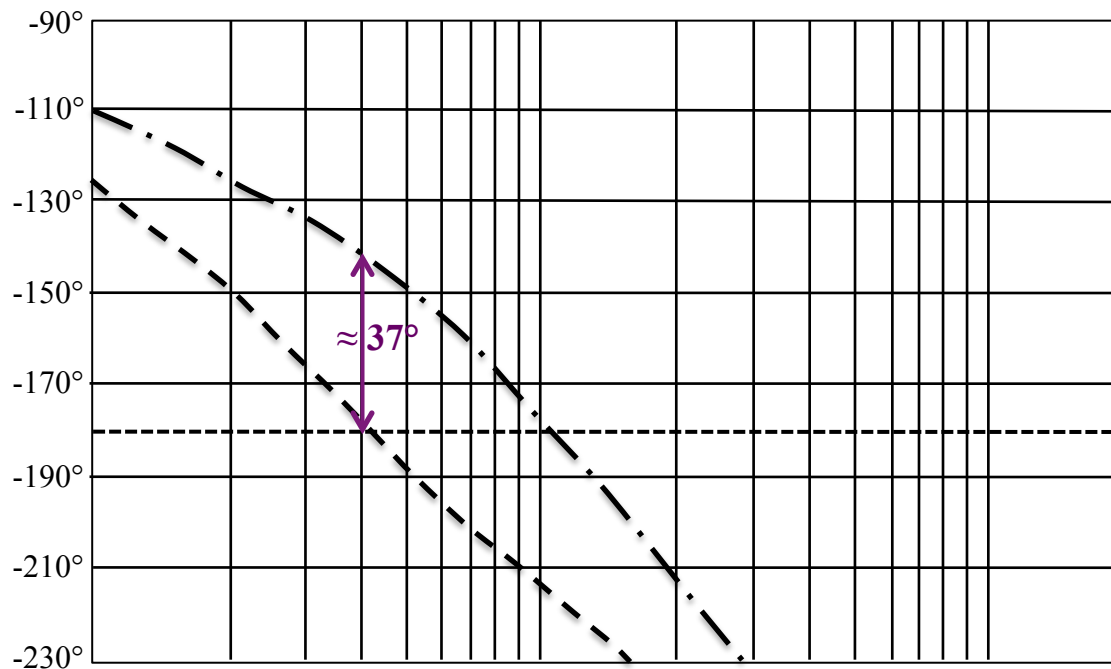
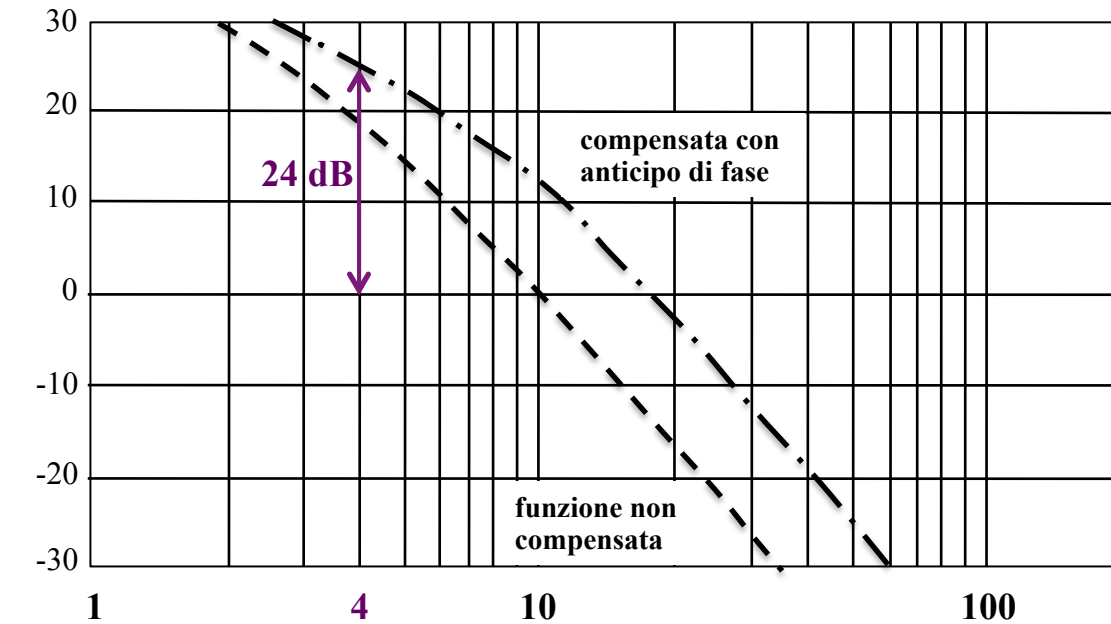
i) anticipatrice  
 $m_a = 4$   
 sufficiente per avere circa  $37^\circ @ \omega_t$   
 (che perderò in parte nel seguito)

usata nel picco  
 $\omega_t \tau_a = 2$

centrata @  
 $\omega_t = 4$   
 $\Rightarrow \tau_a = 0.5$



$\approx + 6 \text{ dB}$   
 $@ \omega_t$



#4 dopo l'anticipatrice

$$\begin{aligned}
 R_{ant}(s) &= \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s} \\
 &= \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.125s} \\
 &= 4 \cdot \frac{s + 2}{s + 8}
 \end{aligned}$$

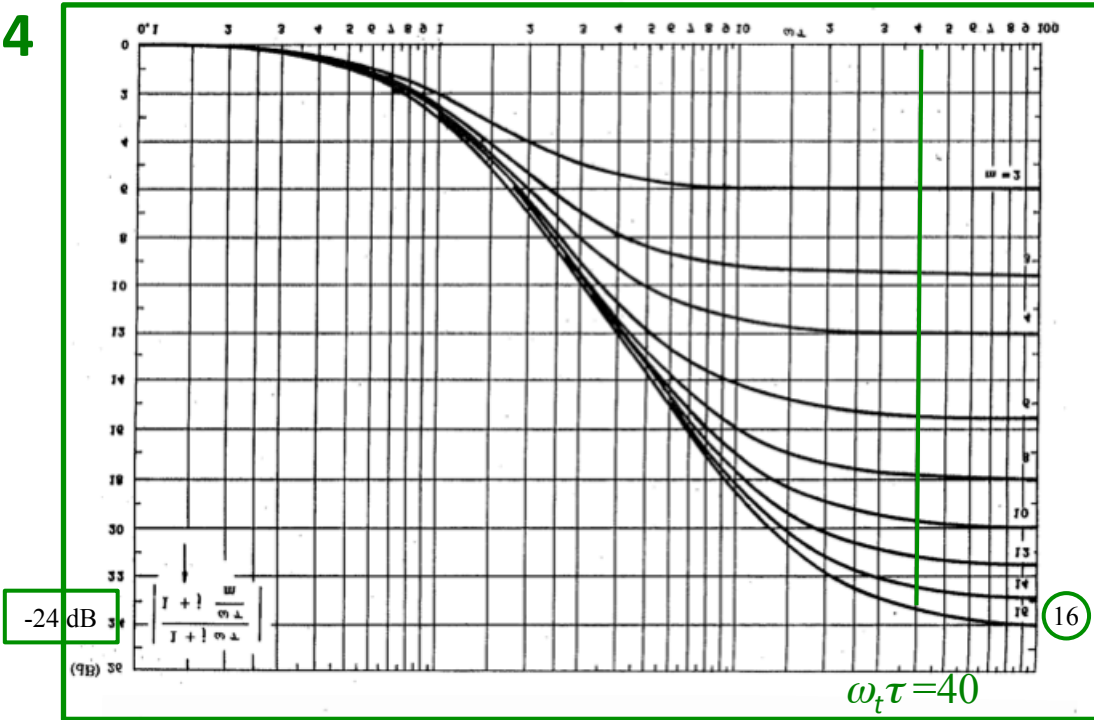


valori intermedi  
 ottenuti @  $\omega_t = 4$   
 $\Rightarrow$  modulo = +24 dB  
 $\Rightarrow$  fase =  $-180^\circ + 37^\circ$

# Esempio # 4

$$\omega_t < \hat{\omega}_t$$

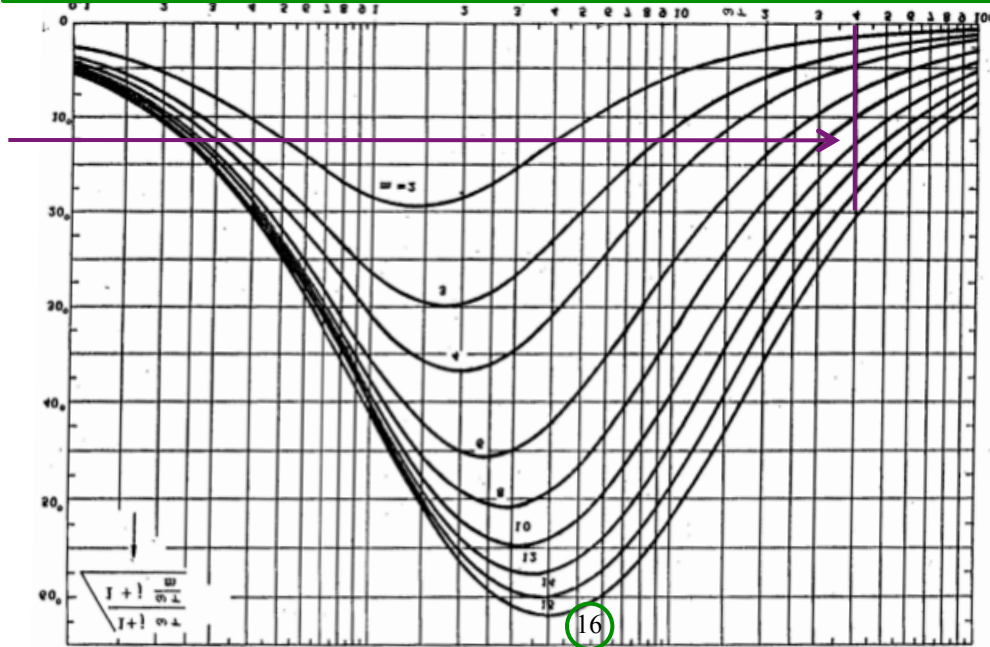
con  $m_\varphi$



-24 dB

16

-20°  
@  $\omega_t$



16

ii) **attenuatrice**

$m_i = 16$   
per avere -24 dB  
necessari  
di attenuazione

usata molto  
in coda

$$\omega_t \tau_i \cong 40$$

centrata @

$$\omega_t = 4$$

$$\Rightarrow \tau_i = 40/4 = 10$$

$$\begin{aligned} R_{att}(s) &= \frac{1 + (\tau_i/m_i)s}{1 + \tau_i s} \\ &= \frac{1 + (10/16)s}{1 + 10s} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{s + 1.6}{s + 0.1} \end{aligned}$$

## Soluzione # 4

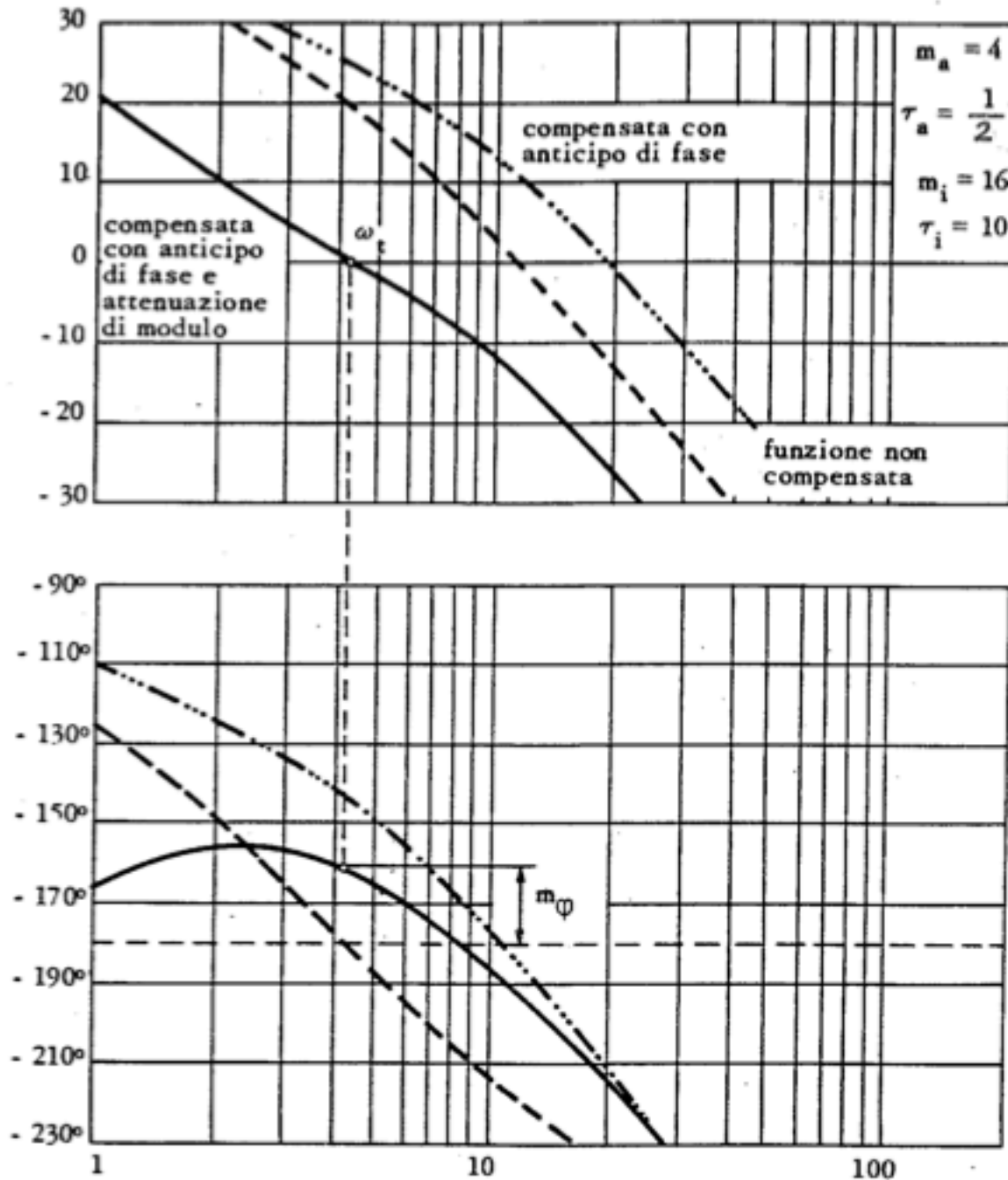
$$R_{ant}(s) \cdot R_{att}(s) = \frac{1+0.5s}{1+0.125s} \cdot \frac{1+0.625s}{1+10s}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t \cong 4$$

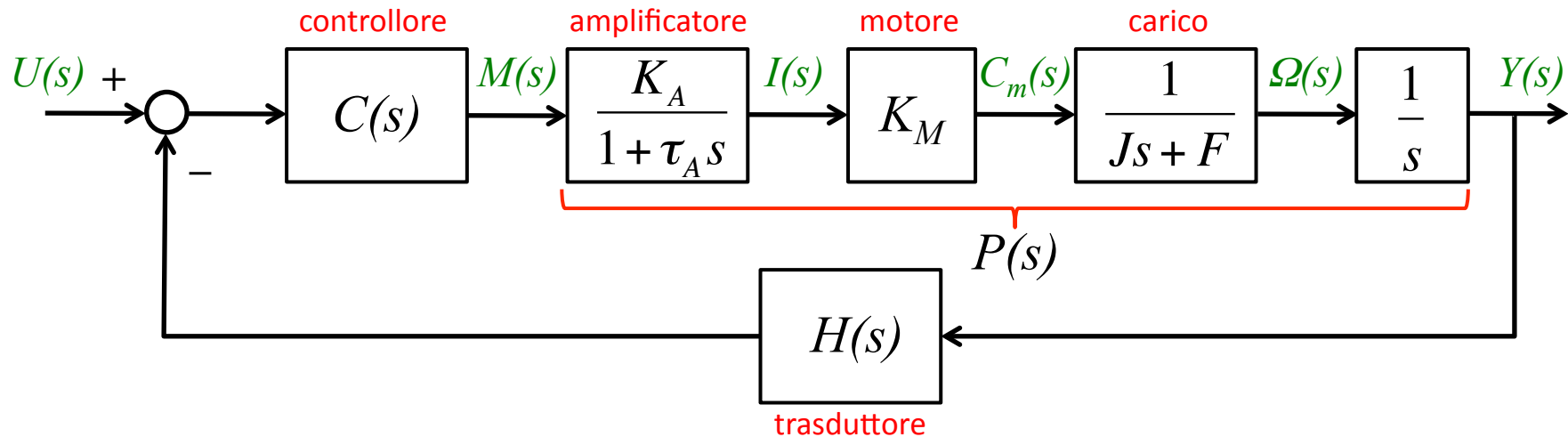
$$m_\varphi \cong 17^\circ$$



## Esercizio

## ASSERVIMENTO DI POSIZIONE ANGOLARE

- motore in CC alimentato sulla corrente d'armatura
- carico inerziale con attrito viscoso



$$K_A = 10 \text{ [A/V]}$$

$$\tau_A = 10 \text{ [ms]}$$

$$K_M = 0.1 \text{ [Nm/A]}$$

$$H(s) = 1/K_d = 1 \text{ [V/rad]}$$

$$J = 1 \text{ [kgm}^2\text{/rad]}$$

$$F = 1 \text{ [Nm/(rad/s)]}$$

(retroazione unitaria)

- processo

$$P(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+0.005s)}$$

- struttura del controllore

$$C(s) = \frac{K_C}{s^h} R(s)$$

- specifiche a regime permanente

- errore nella risposta a rampa unitaria:  $e_1 \leq 0.1$  [rad]

sistema di controllo già di **tipo 1**  $\Rightarrow h = 0$  (nessun polo aggiunto in  $s = 0$ )

$$K_P = 1, K_d = 1 \Rightarrow e_1 = \frac{K_d^2}{K_G} = \frac{K_d^2}{K_C K_P} = \frac{1}{K_C} \Rightarrow K_C = \frac{1}{e_1} \geq \frac{1}{0.1} = 10$$

- specifiche sul transitorio (sulla risposta indiciale)

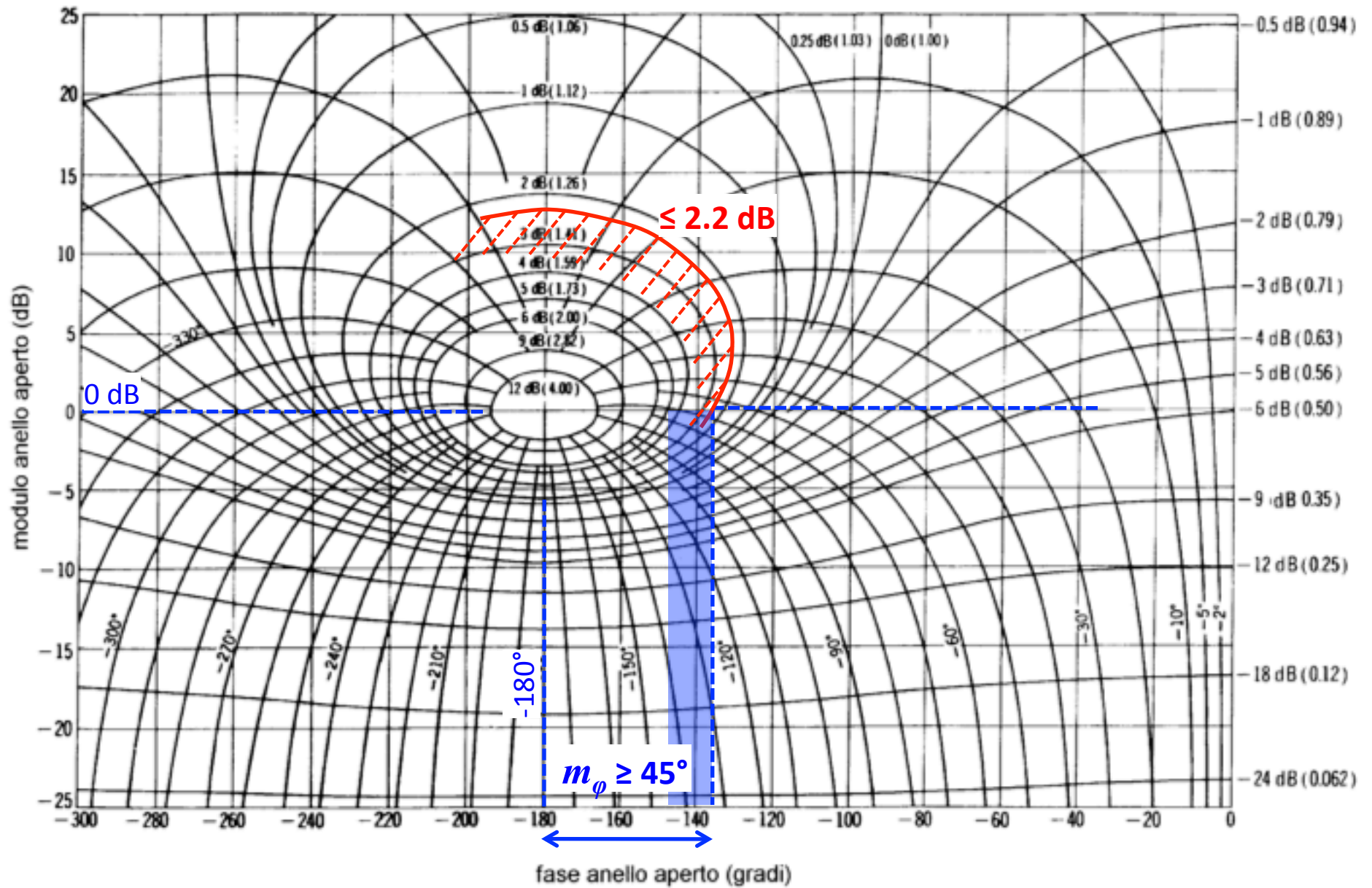
- sovraelongazione:  $\hat{s} \leq 0.1$

$$1 + \hat{s} = 1.1 \approx 0.85 M_r \Rightarrow M_r = 20 \log_{10} \frac{1.1}{0.85} \approx 2.2 \text{ dB}$$

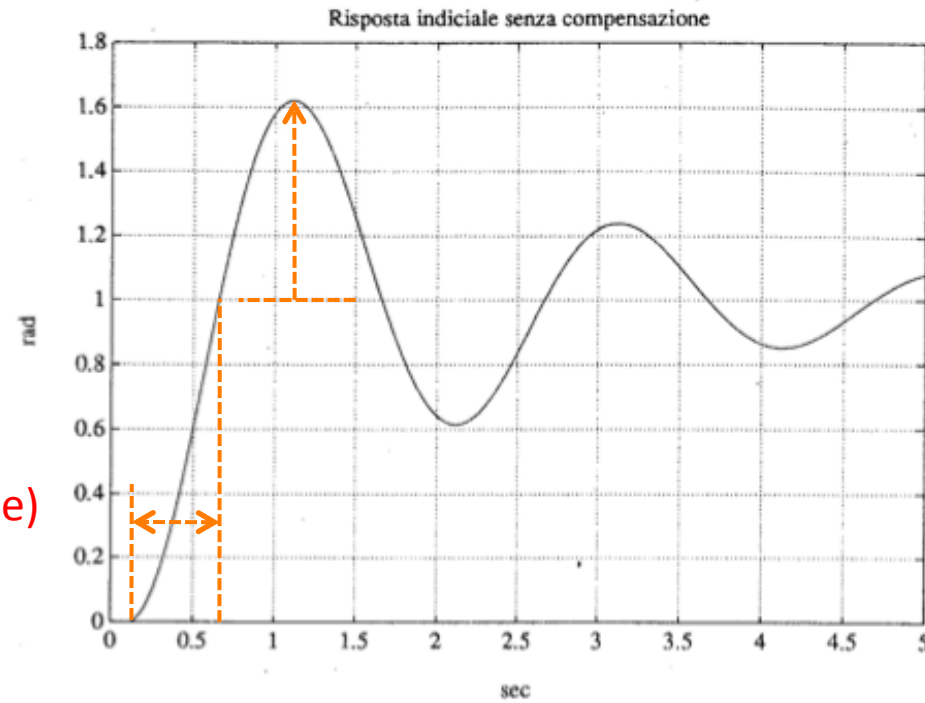
$$m_\varphi \geq 60^\circ - 6 M_r|_{dB} \approx 47^\circ \quad (\text{formula empirica}) \quad \text{oppure} \quad m_\varphi \geq 45^\circ \quad (\text{carta di Nichols})$$

- tempo di salita: due specifiche alternative

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } t_s \leq 2 \text{ [s]} \\ \text{b) } t_s \leq 0.2 \text{ [s]} \end{array} \right\} B_3 \cdot t_s \approx 3 \left\{ \begin{array}{l} B_3 \approx 1.5 \text{ [rad/s]} = 0.2 \text{ [Hz]} \Rightarrow \omega_t \in 0.7 \div 1.4 \text{ [rad/s]} \\ \hspace{15em} \Rightarrow \omega_t = 1 \text{ [rad/s]} \\ B_3 \approx 15 \text{ [rad/s]} \Rightarrow \omega_t = 10 \text{ [rad/s]} \end{array} \right.$$



risposta ad anello chiuso  
ad un gradino unitario  
in  $t_0 = 0.1$  s  
con solo  $C(s) = K_C = 10$   
(senza rete di compensazione)

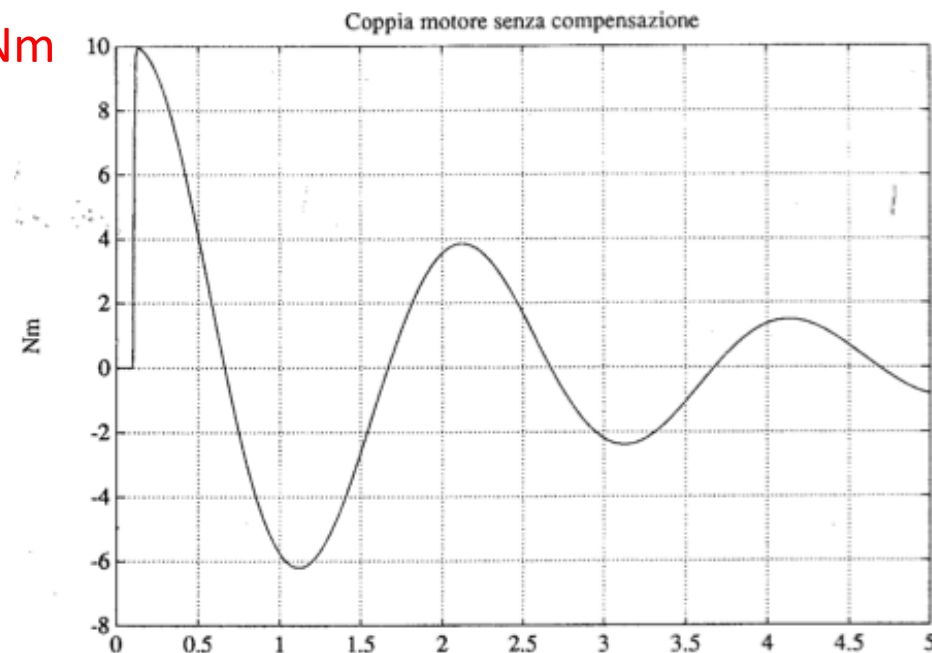


$$\hat{s} \approx 0.6$$

$$t_s = 0.65 \text{ [s]}$$

max coppia iniziale = 10 Nm

sforzo di controllo  
associato





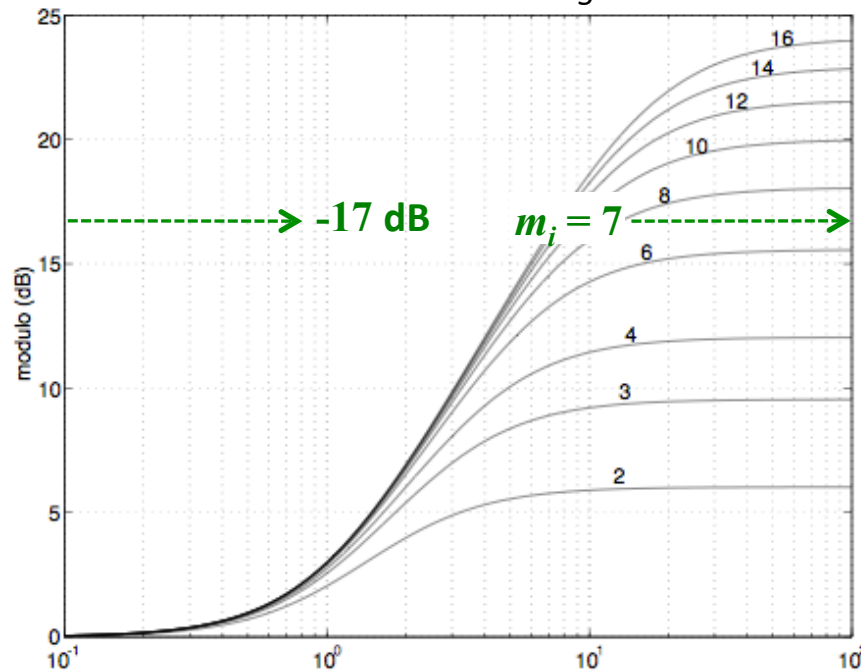
specifiche caso a)  $\omega_{t,des} = 1$  [rad/s],  $m_{\phi,des} \geq 47^\circ$

processo corretto per specifiche a regime ( $K_c = 10$ ):  $10 \cdot P(s) = 10 \cdot \frac{1}{s(1+s)(1+0.005s)}$

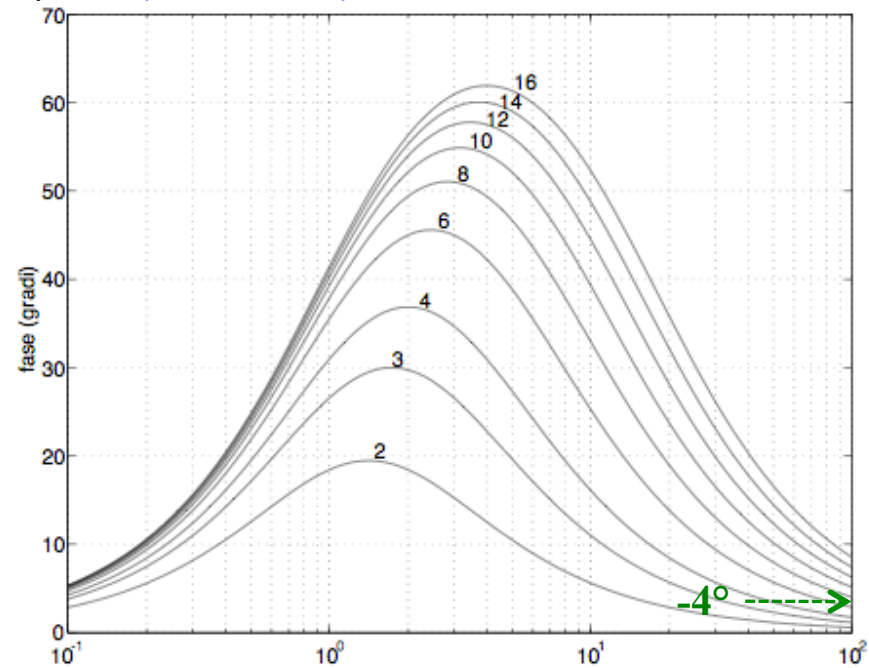
valori attuali per  $10 P(s)$ :  $\omega_t = 3$  [rad/s],  $m_\phi = 15^\circ$

valori @target:  $|10 P(j\omega_{t,des})| = 17$  dB,  $\angle P(j\omega_{t,des}) = -135^\circ \Rightarrow$  **attenuatrice (usata in coda)**

diagrammi delle reti anticipatrici (da ribaltare!)



$\tau = 100 \leftarrow @\omega_t = 1 \leftarrow \omega\tau = 100$



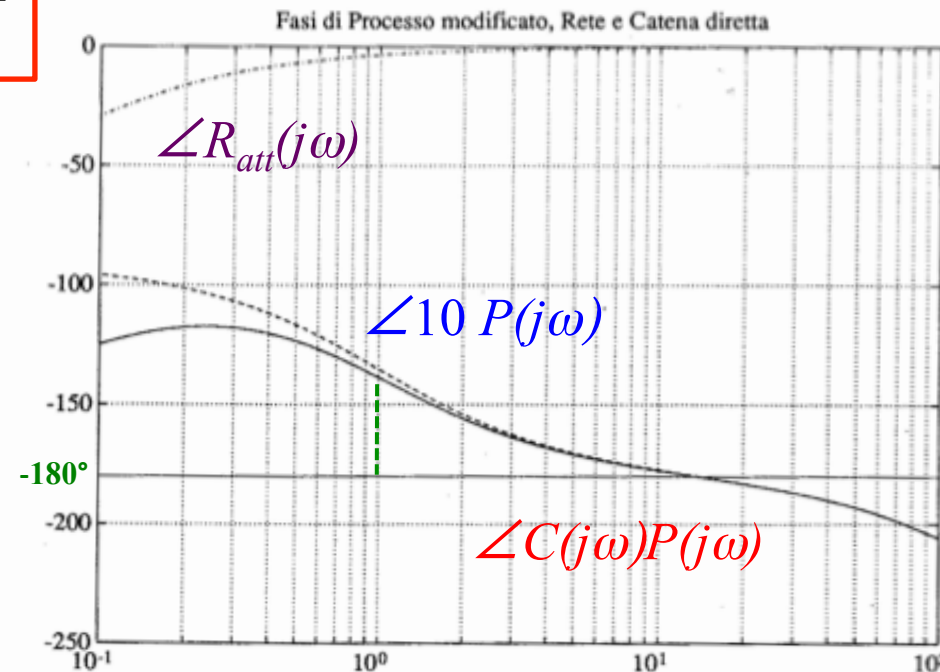
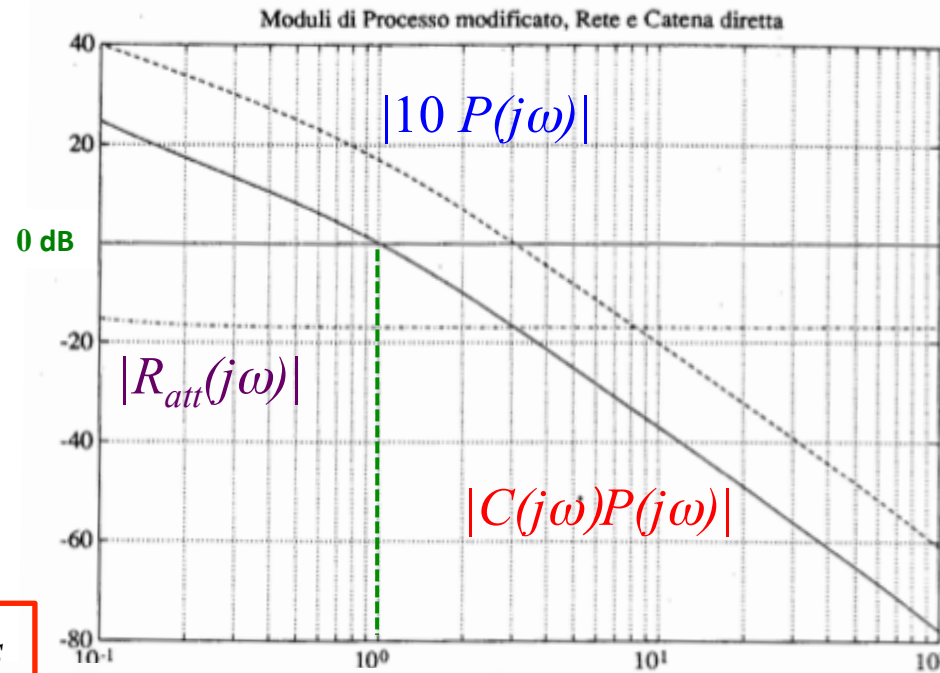
$\Rightarrow R_{att}(s) = \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$

$\omega\tau = 100$

caso a)

$$\omega_t = \omega_{t,des} = 1 \text{ [rad/s]}$$

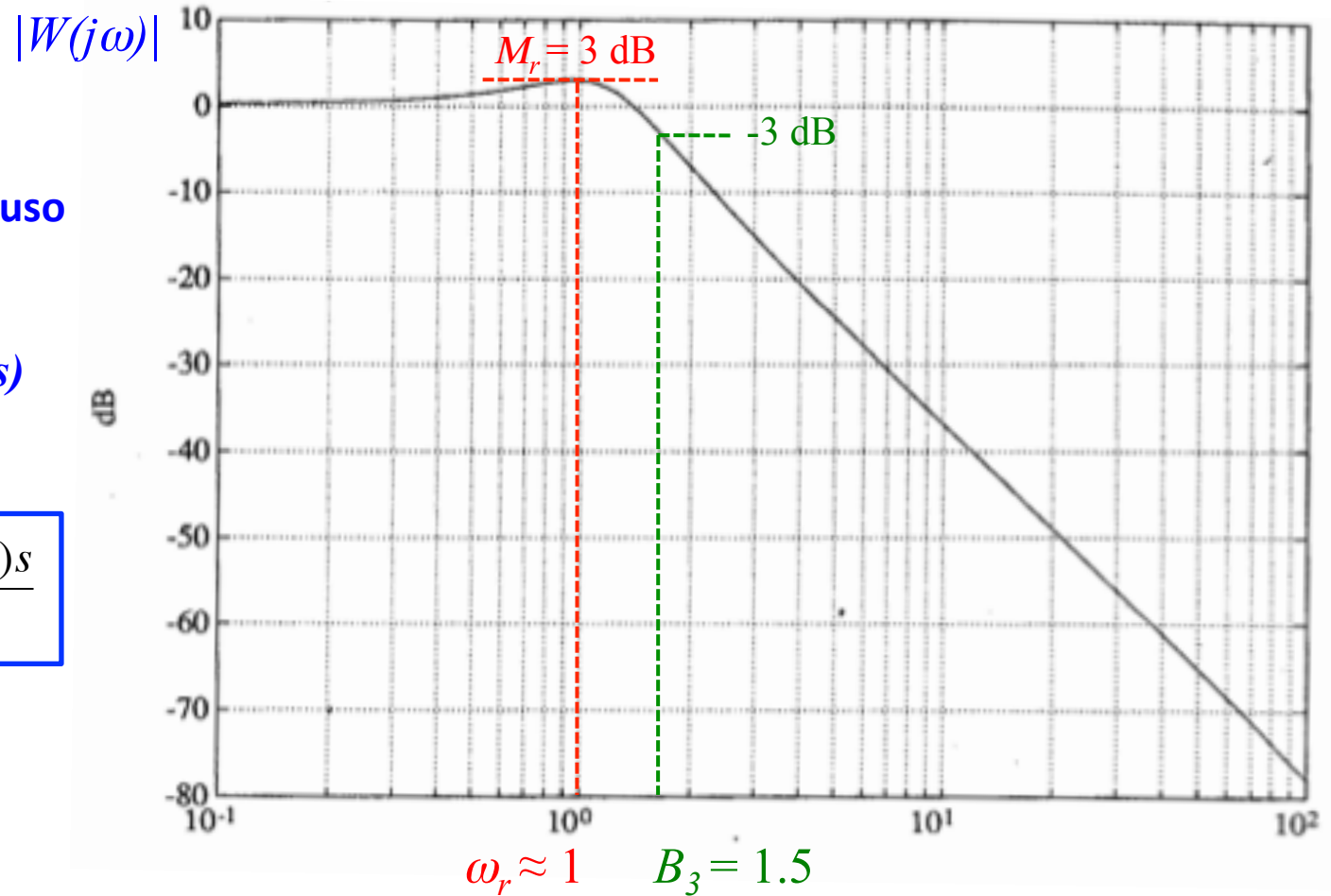
$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$$



$$m_\varphi = 42^\circ$$
$$(m_{\varphi,des} \geq 47^\circ)$$

sistema ad anello chiuso  
 modulo della  
 risposta armonica  
 con  $C(s) = K_C R_{att}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$$



caso a)

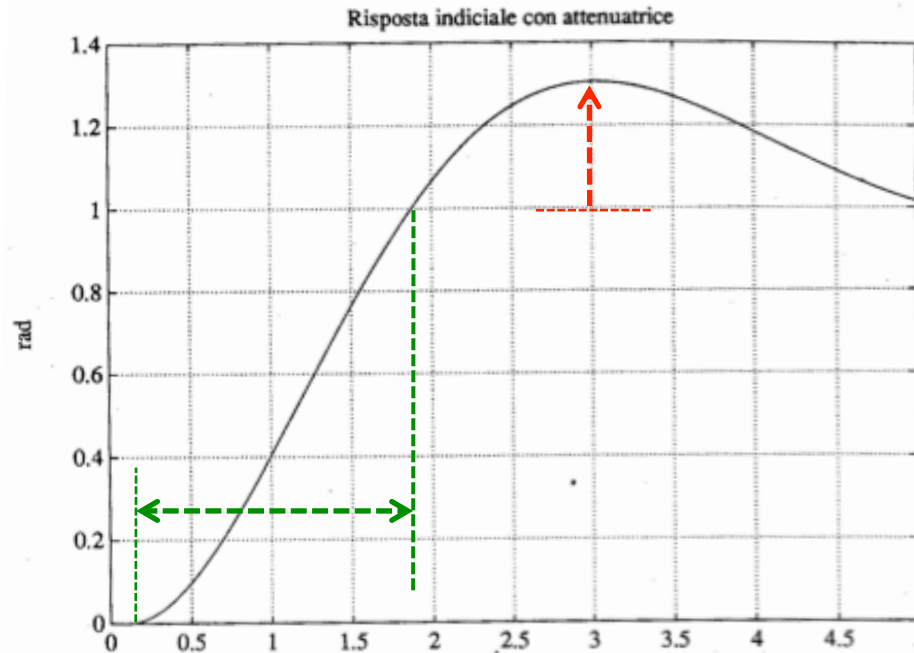
$M_r = 3 \text{ vs. } 2.2 \text{ [dB]}$  ✗

$B_3 = 1.5 \text{ vs. } 1.5 \text{ [rad/s]}$  ✓

sistema ad anello chiuso  
 risposta nel tempo  
 ad un gradino unitario  
 in  $t_0 = 0.1$  s  
 con  $C(s) = K_C R_{att}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$$

sfuerzo di controllo  
 associato



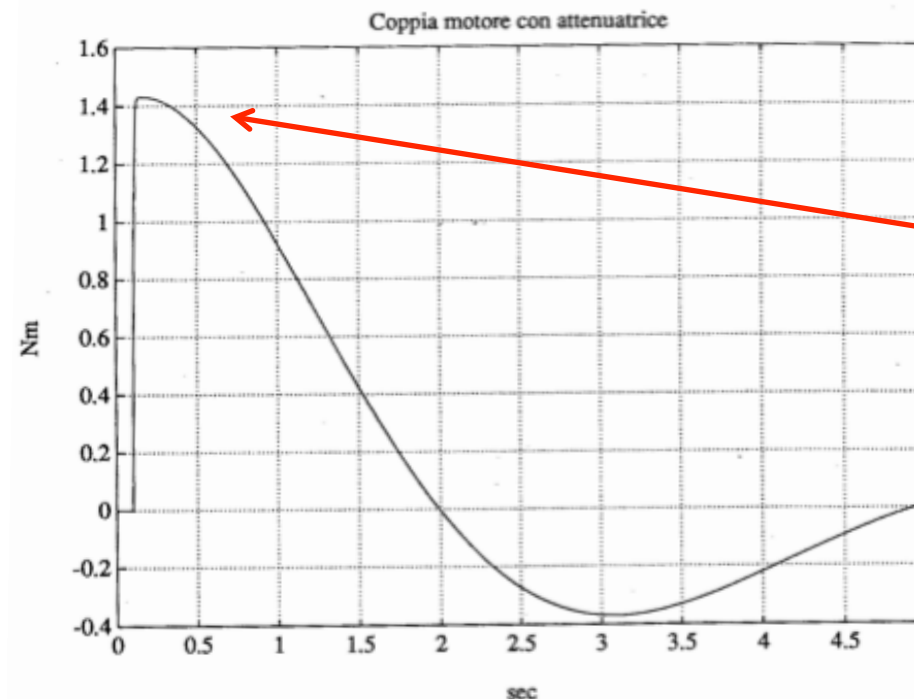
caso a)

$$\hat{s} = 0.3 \text{ vs. } 0.1$$

✗

$$t_s = 1.7 \text{ vs. } 2 \text{ [s]}$$

✓



picco iniziale  
 ridotto  
 (1.4 Nm)

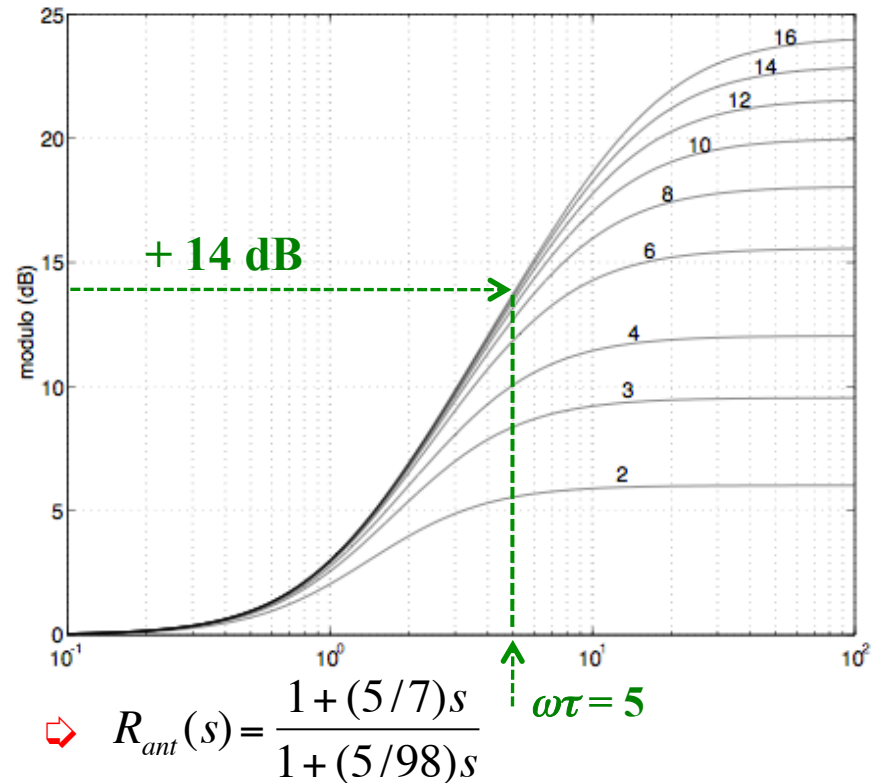
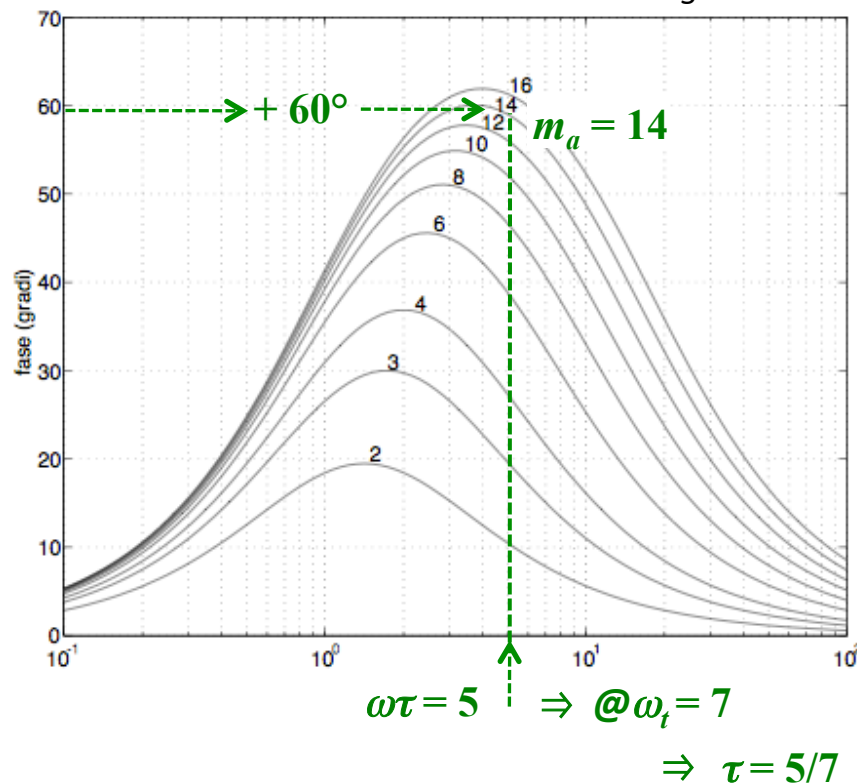
specifiche caso b)  $\omega_{t,des} = 10$  [rad/s],  $m_{\phi,des} \geq 47^\circ$

processo corretto per specifiche a regime ( $K_c = 10$ ):  $10 \cdot P(s) = 10 \cdot \frac{1}{s(1+s)(1+0.005s)}$

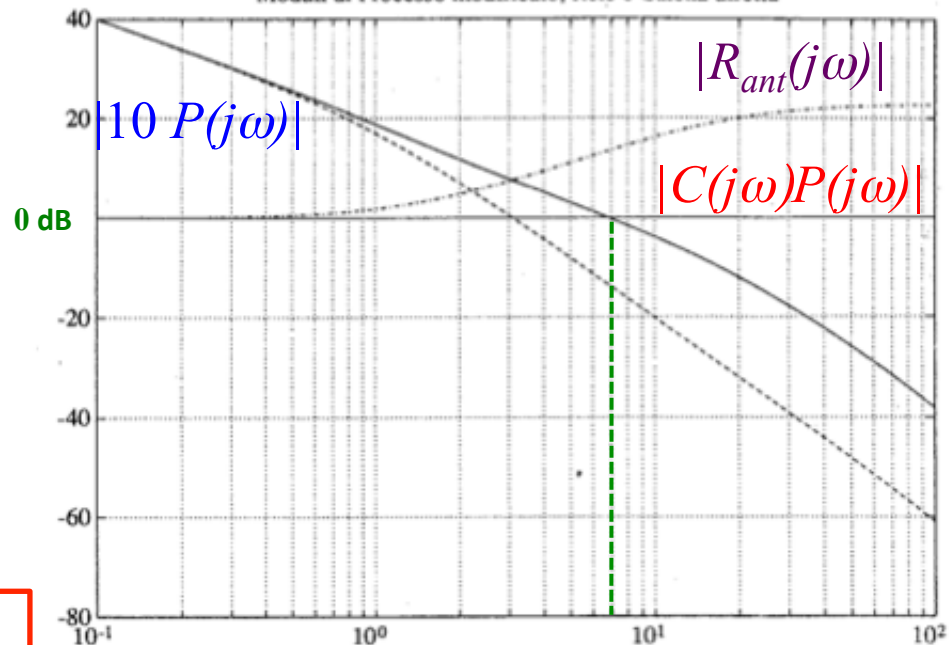
valori attuali per  $10 P(s)$ :  $\omega_t = 3$  [rad/s],  $m_\phi = 15^\circ$

valori @target:  $|10 P(j\omega_{t,des})| = -20$  dB,  $\angle P(j\omega_{t,des}) = -180^\circ \Rightarrow$  **grande anticipatrice (vicino al picco)**

diagrammi delle reti anticipatrici

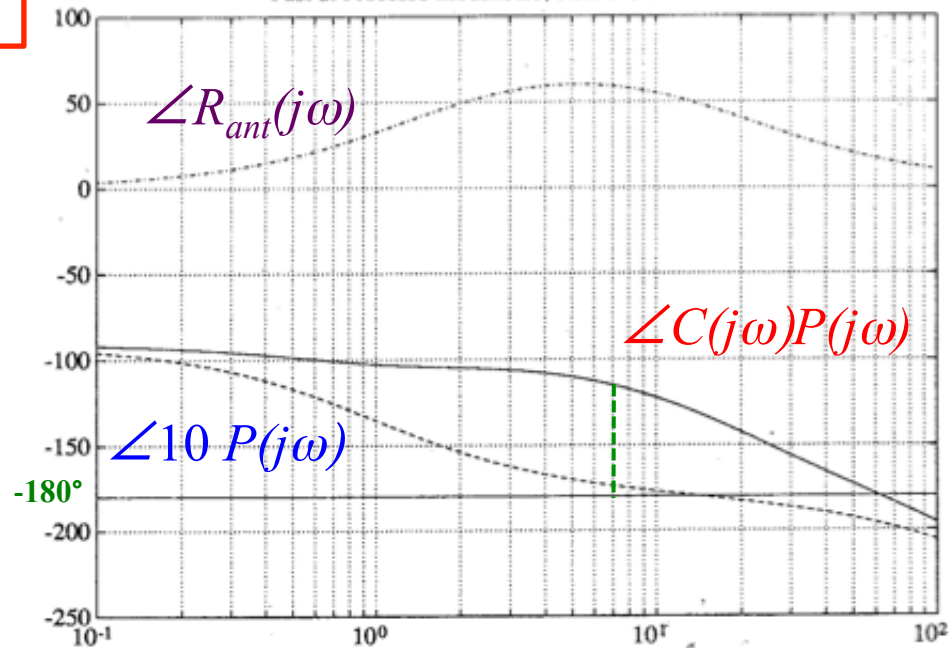


Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta



$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (5/7)s}{1 + (5/98)s}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta



caso b)

$$\omega_t \approx 7 \text{ [rad/s]}$$

$$(\omega_{t,des} = 10 \text{ [rad/s]})$$



si potevano aggiungere circa +4 dB di guadagno sistemando il tutto!



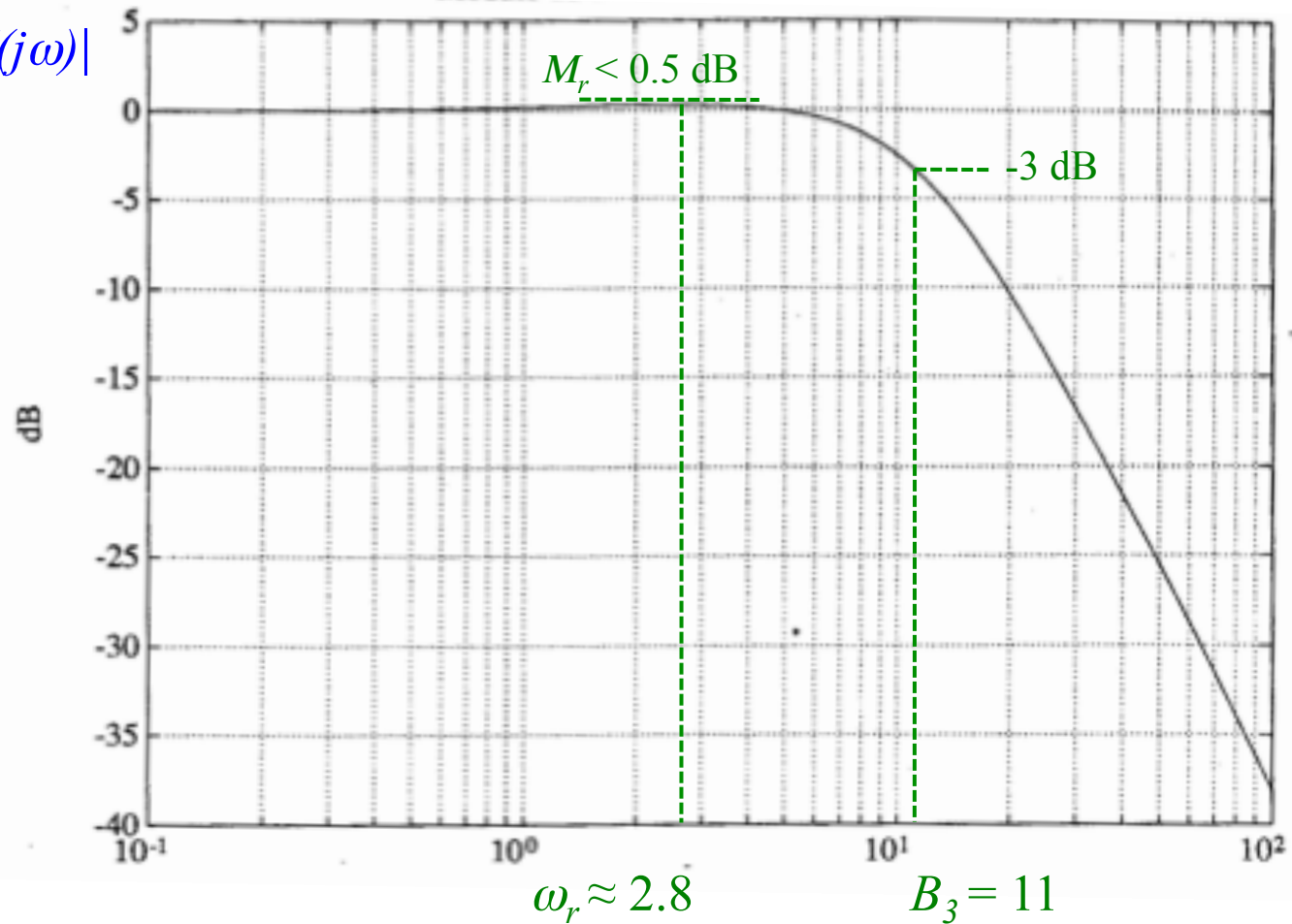
$$m_\varphi = 65^\circ$$

$$(m_{\varphi,des} \geq 47^\circ)$$

$|W(j\omega)|$

sistema ad anello chiuso  
modulo della  
risposta armonica  
con  $C(s) = K_C R_{ant}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (5/7)s}{1 + (5/98)s}$$



caso a)

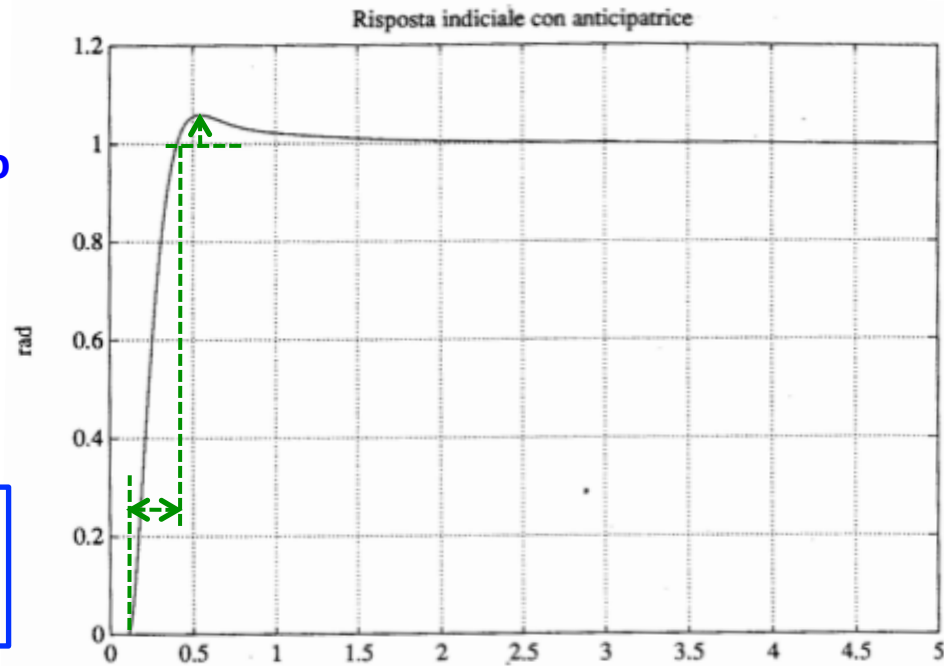
$M_r < 0.5$  vs. 2.2 [dB] ✓

$B_3 = 11$  vs. 15 [rad/s] ~✓

sistema ad anello chiuso  
 risposta nel tempo  
 ad un gradino unitario  
 in  $t_0 = 0.1$  s  
 con  $C(s) = K_C R_{ant}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (5/7)s}{1 + (5/98)s}$$

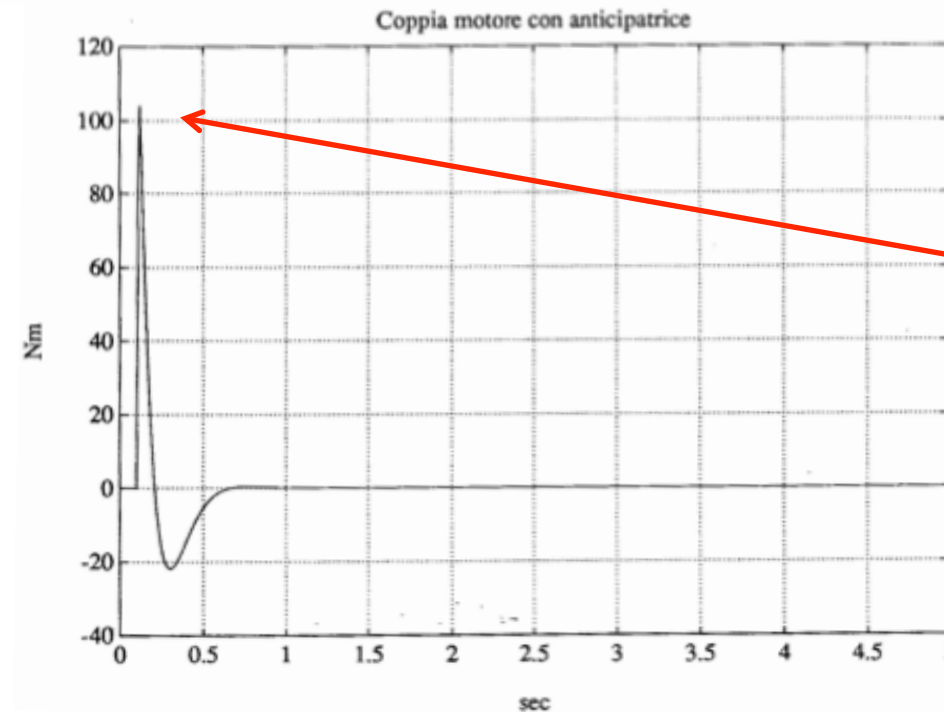
sforzo di controllo  
 associato



caso b)  
 $\hat{s} = 0.06$  vs. 0.1



$t_s = 0.3$  vs. 0.2 [s]



picco iniziale  
 aumentato  
 (> 100 Nm!)